

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний авіаційний університет

М. Я. Островерхов, А. М. Сільвестров  
О. М. Скринник

СИСТЕМИ І МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Монографія

Київ 2016

УДК 681.5.015:621.3.011.72 (02)  
ББК з 960.2 – 024

*Рецензенти:*

**В.М.Азарсков** — д-р техн. наук, проф.,  
завідувач кафедри систем управління літальних апаратів,  
Національний авіаційний університет;

**О. І. Лисенко** — д-р техн. наук, проф.,  
заслужений діяч науки і техніки України,  
лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки;

*Рекомендовано Вченою радою факультету електроенерготехніки та автоматики НТУУ  
«КПІ ім. Ігоря Сікорського», протокол № 3 від 31.10.2016 року.*

**Островерхов М.Я.** – 0771

**Системи і методи ідентифікації електротехнічних об'єктів:** монографія/  
М. Я. Островерхов, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник. – К. : НАУ, 2016. –  
324 с.

ISBN

Викладено деякі існуючі і нові методи ідентифікації статичних і динамічних лінійних і нелінійних об'єктів, зокрема, електротехнічних, в умовах, максимально наближених до реальних, де вхідні, вихідні і проміжні змінні об'єктів ідентифікації вимірюються з випадковими шумами на обмежених інтервалах часу і динамічних діапазонах.

Для спеціалістів, які займаються теоретико-експериментальними дослідженнями реальних об'єктів, в тому числі, електротехнічних, з метою оптимального адаптивного керування ними, діагностики, прогнозування і т. ін.

Буде також корисною для студентів, аспірантів, докторантів і здобувачів, які досліджують реальні об'єкти.

УДК 681.5.015:621.3.011.72 (02)  
ББК з 960.2 – 024

ISBN

© Островерхов М. Я., Сільвестров А. М.,  
Скринник О. М., 2016  
© НАУ, 2016

## ВСТУП

Існує декілька фундаментальних законів світу. Один із них, ігнорування якого часто призводить до негативних наслідків, це *закон причинно-наслідкового зв'язку*. Чим конкретніше, точніше маємо математичну модель зв'язку між причиною та її наслідком у будь-яких об'єктах, наприклад, в електротехнічному об'єкті (ЕТО), тим більш своєчасним буде вплив на зміну причини таким чином, щоб наслідок був якомога кращим.

Згідно з працями [4, 5, 10, 11, 17, 24, 37] ЕТО можуть бути класифіковані, залежно від роду виконуваних завдань. Це:

- 1) *технологічні* — у яких відбувається перетворення початкових матеріалів в готові вироби;
- 2) *транспортні* — у яких відбувається переміщення сировини, напівфабрикатів або готових виробів;
- 3) *енергетичні* — у яких відбуваються перетворення енергії;
- 4) *інформаційні* — у яких здійснюються робочі процеси, пов'язані з управлінням технологічними об'єктами і виробництвом у цілому.

Значна частина процесів використовує електричну енергію. Такого роду процеси називаються *електротехнологічними*. Вони реалізуються за допомогою різного роду електротехнологічних систем. Згідно класифікації [8, 9], розрізняють такі різновиди електротехнологічних систем:

- 1) *електротермічні електротехнологічні системи* забезпечують перетворення електричної енергії на теплову (електричні печі і нагрівальні установки, установки плазмового і електронного нагріву і тому подібне);
- 2) *зварювальні електротехнологічні системи* забезпечують перетворення електричної енергії з одними параметрами в електричну енергію з параметрами, зручнішими для перетворення її на тепло в ході процесів зварювання (зварювальні машини і апарати, трансформатори джерела живлення, випрямлячі тощо);
- 3) *п'єзоелектричні електротехнологічні елементи і системи* перетворюють енергію електричного поля в механічну і навпаки (електростатичні електричні машини, п'єзоелектричні резонатори, фільтри, п'єзоелектричні вібратори тощо);

4) *електротехнологічні системи для електричної обробки матеріалів* перетворюють електричну енергію на інші види, необхідні для реалізації різноманітних технологічних процесів (устаткування електроіскрового легування і електролітного зміцнення деталей, електрогідродинамічні і електроконвективні установки, устаткування анодної обробки, регулювання властивостей дисперсних систем електричними діями тощо);

5) *електромеханічні електротехнологічні системи* забезпечують перетворення електричної енергії на механічну і навпаки (загальнопромисловий електропривод, електропривод транспортних і побутових машин і приладів, спеціалізований електропривод тощо);

6) *спеціалізовані електротехнологічні системи* здійснюють одностороннє перетворення електричної енергії на інші види енергії (хімічну, механічну, світлову, акустичну тощо). Наприклад, устаткування для електрофізичної, електрохімічної плазмової, електрогідравлічної, магнітно-імпульсної обробки деталей і речовин.

Електротехнологічні системи як об'єкти дослідження, незалежно від свого призначення мають [10, 11] таку загальну структуру (рис. В.1).

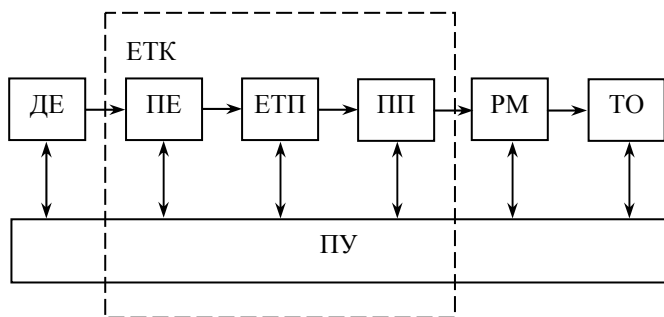


Рис. В.1. Структура електротехнологічних систем:

ДЕ — джерело електричної енергії; ПЕ — перетворювач електричної енергії; ЕТП — електротехнологічний пристрій; ПП — перетворювальний пристрій; РМ — робоча машина; ТО — технологічний об'єкт; ПУ — пристрій управління; ЕТК — електротехнічний комплекс.

Пояснимо призначення елементів, що входять до складу електротехнологічних систем:

ДЕ — джерело електричної енергії, яким може виступати будь-який перетворювач будь-якого виду енергії в електричну енергію (автономні джерела електроживлення, вторинні джерела електроживлення, акумуляторні і сонячні батареї, фотоелементи, термопари). Окрім цього, ДЕ може бути промислова мережа, енергосистема, електромережі транспортних засобів і рухливих об'єктів;

ПЕ — перетворювач електричної енергії. Це пристрій, що перетворює електричну енергію з одними параметрами в електричну енергію з іншими параметрами (трансформатори, напівпровідникові перетворювачі, високочастотні електричні машини, керовані вентильні перетворювачі з автоматичним регулюванням зовнішньої характеристики, електронні гармати і та ін.);

ЕТП — електротехнологічний пристрій, що є перетворювачем електричної енергії в енергію іншого виду (механічну, теплову, хімічну, гідравлічну, акустичну, світлову), яка називається «технологічною». Як приклад, тут можна навести — електричні машини і електричні апарати індуктивного і ємнісного типів тощо;

ПП — перетворювальні пристрої, призначені для перетворення «технологічної» енергії з одними параметрами на «технологічну» енергію з іншими параметрами (редуктори, мультиплікатори, гідропідсилювачі, пневмопідсилювачі, пристрої каналізації теплової енергії, системи охолодження, футерування, теплоізоляція);

РМ — робочий механізм. До нього відноситься частина вищевказаного електроустаткування, що безпосередньо забезпечує реалізацію необхідних робочих процесів у конкретному технологічному процесі (високотемпературні і низькотемпературні камери для термохімічної обробки виробів із чорних і кольорових металів, вузли, механізми і машини, приведені в рух електричними або п'єзоелектричними двигунами і так далі);

ТО — технологічний об'єкт. Це об'єкт, який піддається перетворенням у результаті виконання технологічних операцій. Саме для нього і створюється дана технологічна система.

ПУ — пристрій управління. Сюди відносяться різного роду інформаційні системи, що забезпечують управління і регулювання параметрів перетворення енергії в ході виконання технологічного процесу.

З розгляду структури ЕТК (рис. В.1) випливає, що елементи ПЕ, ЕТП, ПП, ПУ в сукупності виконують визначальну роль у про-

цесі енергоперетворення. Вказана обставина відповідно до діючих стандартів Міжнародної електротехнічної комісії (МЕК) на терміни і визначення [25] дає можливість ввести наступні визначення [11]:

*Електротехнічний комплекс (ЕТК)* — підсистема електротехнологічної системи, що складається з перетворювача електричної енергії, електротехнологічного пристрою, перетворювального пристрою і пристрою управління, і призначена для реалізації робочих процесів робочої машини в заданому технологічному процесі.

*Перетворювач електричної енергії (ПЕ)* — пристрій що перетворює електричну енергію з одними параметрами в електричну енергію з іншими параметрами, і призначений для узгодження параметрів джерела електричної енергії з параметрами електротехнологічного пристрою, і управління електротехнологічним пристроєм відповідно до сигналів пристрою управління.

*Електротехнологічний пристрій (ЕТП)* — перетворювач електричної енергії на «технологічну» (механічну, гідравлічну, акустичну, хімічну, світлову, теплову), призначений для реалізації основного технологічного процесу. Він є основним елементом ЕТК і електротехнологічної системи в цілому.

*Перетворювальний пристрій (ПП)* — перетворювач «технологічної» енергії з одними параметрами на «технологічну» енергію з іншими параметрами, призначений для узгодження параметрів електротехнологічного перетворювача енергії з параметрами робочої машини і управління робочою машиною відповідно до сигналів пристрою управління і регулювання.

*Пристрій управління (ПУ)* — інформаційний пристрій, призначений для вироблення сигналів управління і регулювання процесом перетворення енергії ЕТК для забезпечення заданого робочого процесу робочої машини.

*Довкілля* — сукупність (у загальному випадку) фізично різних підсистем, що взаємодіють з цим ЕТК.

*ЕТО* — електротехнічний об'єкт — об'єкт дослідження, під яким можна розуміти як ЕТК, так і окремі його частини.

На рис. В.2 наведено приклад основного складу електротехнічного комплексу електротехнологічної системи для нанесення на металеву жилу тришарової поліетиленової ізоляції та її вулканізації технологічної лінії уклінного типу з виробництва кабелю на надвисокі напруги до 330 кВ [41].

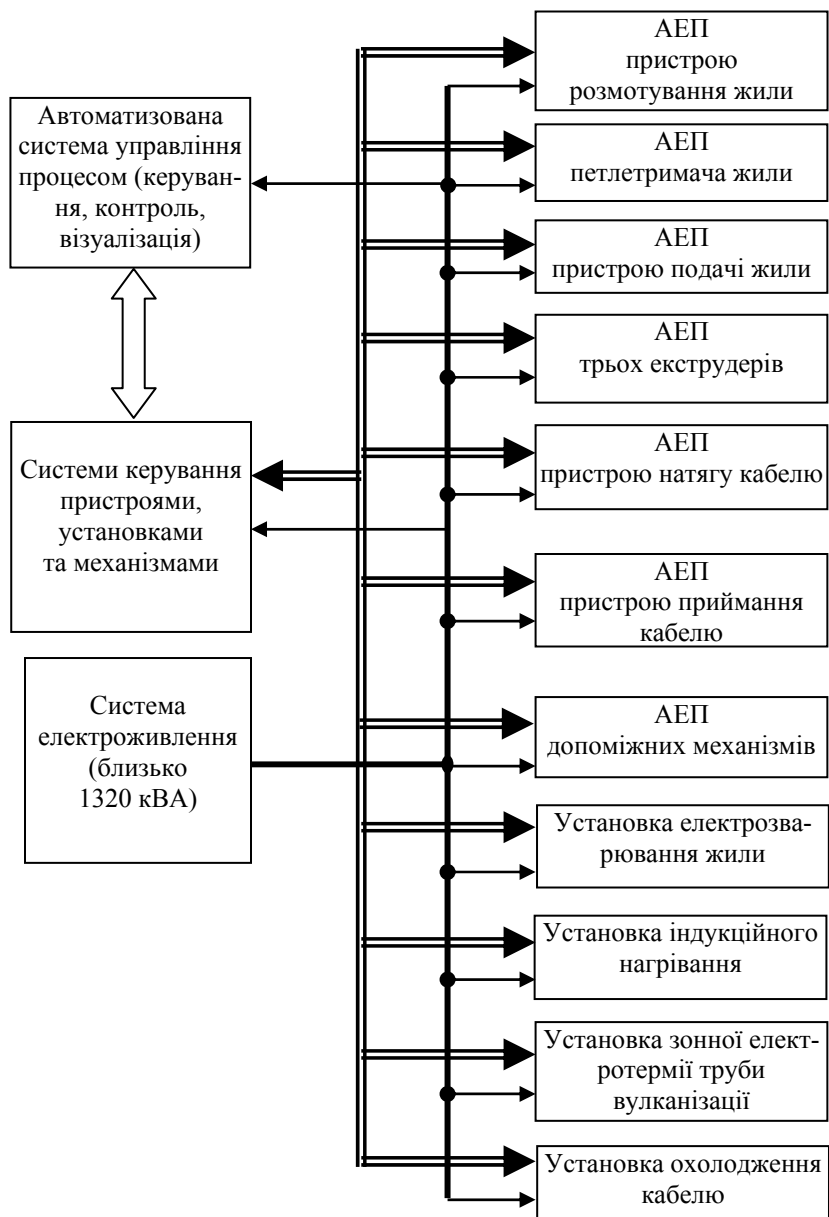


Рис. В.2. Електротехнічний комплекс технологічної лінії уклінного типу з виробництва кабелю на надвисокі напруги

Довжина камери наноструктурного зміцнення (вулканізації) шарів ізоляції разом з камерою охолодження становить 172 м.

Діаметр ізольованої жили становить 122 мм, погонна вага дорівнює 270 Н/м, швидкість переміщення — до 50 м/хв.

Металева жила з алюмінію чи міді може бути перерізом 1000–3000 мм<sup>2</sup> з виконанням по типу сегментованої конструкції «Мілікен». Маса барабана подачі з металевою жилою становить до 20 т, а маса барабана з ізольованою жилою — до 30 т.

Електротехнічний комплекс складається: з системи електроживлення комплексу; декількох десятків автоматизованих електроприводів (АЕП); установок електрозварювання металевої жили, індукційного нагрівання жили, зонної електротермії, подачі азоту під тиском, охолодження першої зони ізоляції та ізольованої жили в цілому; локальних систем керування пристроями, установками та механізмами, зокрема систем керування швидкістю та натягом жили, дозування компонент ізоляції, температурних режимів, дегазації та сушки; автоматизованої системи управління технологічним процесом для забезпечення заданих показників якості кабельної продукції та техніко-економічних показників, оперативного надання та зберігання інформації про хід процесу, створення звітів.

Система електроживлення забезпечує комплекс сумарною потужністю близько 1320 кВА.

Основними споживачами електроенергії є: автоматизовані електроприводи, зокрема електроприводи трьох екструдерів мають потужність біля 450 кВА; установка зонної електротермії — 350 кВА, електрозварювання — 300 кВА, індукційного нагрівання — 120 кВА.

Високоякісна продукція (кабель) є продуктом високоякісних складових багатоваріантного технологічного процесу, де кожна ділянка ТП робить свій внесок у якість і собівартість продукції. Тому дуже важливо формалізувати та узгодити з головним показником показники якості процесу на кожній ділянці та побудувати адаптивні (до природної зміни параметрів) оптимальні системи автоматичного керування.

Останнє можливо лише за наявності підсистем ідентифікації ділянок ТП, як об'єктів керування з використанням принципів [розділ 1, (1.11)] побудови багаторівневих систем. Згідно з працею [2] модель даного об'єкту визначається так: *модель* — зображення іс-



тотних сторін реальної (чи конструйованої) системи в зручній формі, що відбиває необхідну інформацію про систему.

Це визначення можна застосувати і до математичних моделей ЕТО, серед яких розрізняють такі [1, 22, 38, 43, 44]:

*Непараметричні моделі ЕТО* припускають використання деякого перетворення або функціонального простору, за допомогою якого можна представити вхідний і вихідний сигнали. Прикладами таких перетворень можуть слугувати розкладання в ряд Фур'є, розкладання по прямокутних сигналам, розкладання в ряд по функціях Лаггера і т. д. [6, 35].

Побудова моделей цього типу полягає у визначенні зв'язку між функціональними просторами вхідних і вихідних сигналів. У цих моделях використовується ідея «чорної скриньки» — яка не враховує фізичну природу досліджуваного ЕТО.

Перевага цих моделей — вони не вимагають знання структури об'єкту.

Недолік — використовуваний функціональний простір є практично нескінченновимірним, що ускладнює його використання; моделі не згодні для задач діагностики параметрів об'єкта.

*Параметричні моделі ЕТО* є системами з диференційних або диференційно-алгебраїчних рівнянь кінцевої розмірності. Параметри цих рівнянь, що є параметрами моделей, виступають як координати деякого простору (простори параметрів).

Перевагою параметричних моделей є використання простору параметрів кінцевої розмірності.

Відзначимо, що тут можливі великі помилки, якщо порядок системи рівнянь не відповідає порядку досліджуваного ЕТО, що призводить до необхідності вивчення і деталізації його фізичної природи з метою подальшого адекватного моделювання.

Теорія ідентифікації на основі попередньої (ап'іорної) і поточної (апостеріорної) інформації про причини (вхідні змінні ЕТО) і наслідки (вихідні змінні ЕТО) займається визначенням математичної моделі, що зв'язує ці змінні.

На жаль, абсолютно точну ізоморфну ЕТО модель побудувати неможливо, оскільки за законами реального світу не існує ідеально ізольованого автономного об'єкта (все з усім взаємно пов'язане); не існує нічого стаціонарного (сталого), бо рух і матерія нероздільні, а виходячи з цього, як наслідок, не існує лінійних ста-

ціонарних систем. Отже, будь-яка математична модель реального ЕТО буде наближеною.

Для отримання якісного наслідку в задачах керування ЕТО, діагностики внутрішніх параметрів і змінних стану ЕТО, необхідно методами теорії ідентифікації побудувати таку математичну модель, за якої якнайкраще вирішується головне завдання (керування, прогноз, діагностика тощо). Теорія ідентифікації — це фактично формалізована математична теорія пізнання об'єктів реального світу, в тому числі і ЕТО.

Важливим інструментом для розв'язання складних завдань ідентифікації є системний підхід. Система ідентифікації ЕТО розглядається як підсистема багаторівневої системи, де використано принципи декомпозиції, композиції, оптимізації. Змінні стану системи також розглядаються як об'єкти ідентифікації на основі статистичного підходу. Для грубого визначення причинно-наслідкових зв'язків у ЕТО в роботі розглянуто апарат регресійного аналізу. Але реальність така, що не завжди виконуються умови, за яких статистичні методи оптимальні. Тому також розглянуто низку методів, які враховують неточність вимірювання не лише наслідків, а й причин.

Розглянуто моделі багатовимірних лінійних і нелінійних ЕТО. Суттєве спрощення завдання вибору структури моделі досягається урахуванням законів фізики процесів у об'єкті. Наведено конкретні моделі ЕТО і методи їх активної ідентифікації. Методи гарантують високу точність і об'єктивність завдання ідентифікації динаміки і статички ЕТО, а також орієнтацію на головну ціль системи з ЕТО.

## РОЗДІЛ 1

# ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

### 1.1. Визначення системи

Першим кроком розв'язання задачі дослідження ЕТО є її формалізація. На цьому етапі необхідно поставити задачу. Постановка полягає у відображенні невизначеної ситуації, що пов'язана з реальним ЕТО, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

З умов фізичної реалізованості подані у праці [8] фундаментальні визначення стаціонарної, дискретної, безперервної, скінченновимірної, лінійної, гладкої та динамічної систем з точки зору їх зовнішньої поведінки. Для гладких (а реальні системи всі гладкі) систем доведено теорему про те, що перехідна функція стану, тобто відображення

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{X}$$

водночас є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (1.1)$$

де  $x \in X$ ,  $u(t) = \omega(t) \in \Omega$ ;  $t \in T$ ;  $T$  — впорядкована множина моментів часу;  $\Omega, X$  — множина вхідних впливів і змінних стану.

*Стан системи* — це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу  $t_0$ .

Якщо множина  $X$  належить скінченновимірному простору, то модель (1.1) являє собою скінченновимірну систему нелінійних нестационарних диференціальних рівнянь першого порядку. Із системи (1.1) за певних припущень можуть бути отримані системи лінійних і (або) стаціонарних рівнянь (1.2). Чим вужча область визначення змінних  $\{X, \Omega, T\}$ , тим ближче в просторі  $X$  буде спрощена модель (1.2) до повної (1.1).

Для гладкої системи (1.1) справедливе існування таких  $X_1 \subset X, \omega_1 \subset \Omega, T_1 \subset T$ , що (з точністю до наперед заданої малої похибки  $\varepsilon$ ) системі (1.1) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь із матрицями  $A$  і  $B$  постійних коефіцієнтів:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t); \quad y_1(t) = Cx_1(t), \quad (1.2)$$

де  $\dot{x}_1(t)$  — вектор-функція похідних  $\{\dot{x}_{1i}(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $x_1(t)$  — вектор-функція  $\{x_{1i}(t)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $u_1(t)$  — вектор-функція  $\{u_{1j}(t)\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $y_{1i}(t)$  — вектор-функція вимірювань  $\{y_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, r}$ ;  $A, B, C$  — матриці розміру  $(n \times n), (n \times m), (r \times n)$  відповідно.

Структура і рангові властивості матриць  $A, B, C$  визначають умови *керованості, спостережуваності й ідентифікаційності* системи (1.2) [21].

*Критерій оптимальності або мета*, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати «розмитий» характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію (мети) досягається шляхом завдання функціонала, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Мета системи — забезпечення екстремального значення цього функціонала. Під функціоналом  $I$  розуміють відображення

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \mathbf{X} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R},$$

де  $\mathbf{R}$  — множина дійсних чисел.

Системі (1.1) для фіксованих початкових  $t_0 \in T$  і кінцевих  $t_1 \in T$  моментів часу, станів  $x_0 \in X, x_1 \in X$ , поведінки системи  $x(t)$ , викликаній не нульовими початковими умовами та керувальним впливом  $u(t)$ , відповідає конкретне дійсне число  $I$  з множини  $\mathbf{R}$ .

Керувальний вплив  $u^*(t)$  оптимальний, якщо число  $I$  з урахуванням початкових умов, рівняння (1.1) та інших обмежень на  $x(t)$  і  $u(t)$  приймає екстремальне (мінімальне або максимальне) значення, де  $I^* \in \mathbf{R}$ .

Для знаходження оптимальної стратегії управління  $u^*(t)$  реальним об'єктом необхідна його модель (1.1), тобто структура і параметри функціонального відображення  $f$ .

Визначення відображення  $f$  у рівнянні (1.1) за результатами вимірів  $x(t)$ ,  $u(t)$  є завданням ідентифікації. Оптимальність моделі  $\hat{f}$  відображення  $f$  оцінюється критерієм якості ідентифікації  $J$ , який також є функціоналом, що відображає множини реалізацій або конкретні реалізації  $x(t)$  і  $x_m(t)$  в дійсне число  $J$ , де  $x_m(t)$  є розв'язком рівняння моделі

$$\frac{dx_m}{dt} = \hat{f}(t, x_m, u) \quad (1.3)$$

для спільного з об'єктом вхідного впливу  $u(t)$ .

Оскільки в загальному випадку  $\hat{f} \neq f$ , то оптимальне для моделі (1.3) значення  $\hat{I}^*$  отримане при керувальному впливі на об'єкт  $u(t)$ , буде дещо гірше істинного оптимального значення  $I^*$ .

Модель (1.3), побудовану з урахуванням не тільки функціонала  $J$ , але і  $I$ , назовемо цілеорієнтованою [32, 33].

Якщо на множині  $\{f_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) допустимих відображень відображення  $\hat{f}$  (1.3) для фіксованого управління  $u(t)$  дає екстремальне значення  $\hat{I}^*$ , тобто

$$\hat{f} = \arg \operatorname{extr}_{\hat{f}_i \in \{\hat{f}_i\}} I,$$

то таку модель назовемо цілеорієнтованою оптимальною.

Близькість моделі до цілеорієнтованої оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$  до дійсних змінних  $x(t)$  і  $u(t)$  реального об'єкта. При вирішенні задачі ідентифікації в (1.3) і в  $J(x, x_m)$  підставляють не  $x(t)$  і  $u(t)$ , а їх оцінки  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ , формування яких є задачею ідентифікації сигналів об'єкта. Оцінки  $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$  сигналів  $x(t)$  і  $u(t)$  в (1.1) отримують за допомогою фільтрів  $f_\Phi$ :

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = f_\Phi(t, \hat{z}, z), \quad (1.4)$$

де  $z(t)$  — вектор-функція виміряних первинними перетворювачами сигналів  $x(t), u(t)$ ,  $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$ ,  $N_x, N_u$  — похибки вимірювання  $x$  і  $u$  відповідно.

Оптимальність фільтрів (1.4) оцінюється критерієм якості фільтрації  $J_\Phi$  — функціоналом від сигналів  $\hat{z}, z$  або їх спектральних характеристик.

Оскільки  $f_\Phi$  не дає ідеального перетворення  $z$  у  $(x, u)$ , то від критерію  $J_\Phi$  в задачі ідентифікації сигналів  $\hat{z}, z$  буде залежати значення критерію  $J$  в задачі ідентифікації відображення  $\hat{f}$  в (1.3), від якого (у свою чергу) залежить значення критерію  $I$  якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (1.3), для фільтра (1.4) введемо поняття цілеорієнтованості та оптимальності. Фільтр (1.4) *цілеорієнтований*, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації  $\hat{f}$  в (1.3). Якщо на множині припустимих відображень  $\{f_{\Phi i}\}$  відображення  $f_\Phi$  в (1.4) за фіксованого  $\hat{f}$  забезпечує екстремальне значення  $J^*$ , тобто

$$f_\Phi = \arg \underset{f_{\Phi i} \in \{f_{\Phi i}\}}{\text{extr}} J,$$

то фільтр (1.4) буде *цілеорієнтованим оптимальним*.

Оптимізація функціоналів  $I, J, J_\Phi$  пов'язана з поняттям *релаксаційного процесу* [19]. Множина  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області  $G$  нормованого простору, називають *релаксаційним процесом* (РП) щодо оптимізуємої функції  $F(Q_k)$ , якщо послідовність  $F(Q_k)$ , для упорядкованого за значенням  $k$  також впорядкована. Так, в задачі мінімізації послідовність  $F(Q_k)$  така, що  $F(Q_0) \geq F(Q_1) \geq F(Q_2) \geq \dots$ . РП збігається за функціоналом, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F(Q_k) - F(Q^*)) = 0,$$

і просто збігається, якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_k = Q^*,$$

де  $Q^*$  — істинне значення.

Надалі визначення РП поширимо на випадок, якщо елементи  $Q_k$  належать області  $G$  простору, у якому не задано поняття норми або відстані, знак  $\geq$  розуміється як символ відношення порядку. Так, наприклад, в задачі ідентифікації при введенні підмножини

структур  $\Sigma$  моделей і множин методів  $Opt$  оцінювання вектора  $\beta$  параметрів моделі  $(\Sigma, \beta)$  РП не є строго релаксаційним. Множину  $\{Q_k\}$ ,  $k \geq 0$ , назовемо РП щодо  $F(Q_k)$ , якщо для будь-якого  $k > 0$ , існує таке значення  $j > 0$ , що  $F_{k+j} \leq F_k$ . Такий РП не є релаксаційним, і збіжність його за функціоналом  $F$  або за  $Q_k$  залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це  $\{\Sigma, Opt\}$ ).

Системою ідентифікації в загальному вигляді будемо називати прямий добуток підмножин  $\{\Sigma, \beta\}$ ,  $\{Opt, \alpha\}$ ,  $\{J\}$ ,  $\{I\}$ ,  $\{T\}$ , що позначається як  $\{\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}, \{J\}, \{I\}, \{T\}\}$  і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес  $Q_k$  відносно показника  $F$ , такий що  $F_{k+j} \leq F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $j > 0$ ;  $Q_k \in \{\{\Sigma, \beta\}, \{Opt, \alpha\}\}$ ,  $F_k \in \{\{J\}, \{I\}\}$ . Тут  $\{\Sigma, \beta\}$  — підмножина моделей;  $\{Opt, \alpha\}$  — підмножина методів оцінювання вектора  $\beta$  параметрів моделей  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\alpha$  — вектор параметрів методу  $Opt$ ;  $\{J\}$  — підмножина оптимізуємих за  $\beta$  методами  $\{Opt, \alpha\}$  функціоналів від  $\varepsilon(\beta, t)$ ;  $\varepsilon(\beta, t)$  — різниця вимірюваних координат реального об'єкта  $\Sigma_\infty$  і моделі;  $\{I\}$  — підмножина основних функціоналів, що визначають якість вирішення основної задачі для реальної системи  $\Sigma_\infty$  з використанням моделі  $\{\Sigma, \beta\}$ ;  $\{T\}$  — підмножина моментів  $t_k$  часу, на якому реальну систему  $\Sigma_\infty$  представлено набором даних  $\{u(t_k), y(t_k)\}$  у вигляді системи з точки зору її зовнішнього поводження [8].

У практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніше, чим менше потрібно для її роботи апріорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається *адаптацією* [14, 15, 32, 33], що полягає в цілеспрямованій зміні одного, декількох або всіх елементів підмножини  $\{Q_k\}$  з метою досягнення екстремуму головного показника  $F$ . За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніше система. Якщо не враховувати фактор складності, то при адаптації  $\{Q_k\}$  результат тим ефективніший, чим ширша підмножина  $\{Q_k\}$ . У разі врахування в

показнику  $F$  складності системи існує оптимальна за  $F$  потужність підмножини  $\{Q_k\}$ .

Зазвичай в адаптивних системах ідентифікації підмножина  $\{Opt, \alpha\}$  за типом методу  $Opt$  одноелементна. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП  $\{\beta_k\}$  щодо показника  $J$ , різним — склад підмножин  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$ . У табл. 1.1 визначено різні за  $\{Q_k\}$  і  $\{F_k\}$  системи ідентифікації.

Таблиця 1.1

**Систематизація систем ідентифікації**

№ з/п	Тип сигналу	$\{Q_k\}$				$\{F_k\}$	
		$\beta$	$\Sigma$	$\alpha$	$Opt$	$J$	$I$
1	сі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\alpha$	$Opt$	$J$	—
2	СІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\alpha$	$Opt$	$J$	—
3	асі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\{\alpha_k\}$	$Opt$	$J$	—
4	АСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$Opt$	$J$	—
5	басі	$\{\beta_k\}$	$\Sigma$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$I$
6	БАСі	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$I$
7	СС	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$\{I_q\}$

1. Системи ідентифікації у вузькому сенсі (сі) реалізують РП  $\{\beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $\Sigma$ ,  $Opt$ ,  $\alpha$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k\}$ ,  $F = J$ . Тут задача ідентифікації є еквівалентною задачі оптимізації функції  $J(\beta_k)$ , яка, залежно від виду  $J$ , може бути вирішена методами теорії лінійного або нелінійного оцінювання або алгоритмами математичного програмування.

2. Системи ідентифікації в широкому сенсі (СІ) реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k\}$  щодо  $J$  за постійних  $Opt$ ,  $\alpha$ , і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, у працях [31, 32, 33] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі з вектором  $\beta_k$  змінної розмірності, для яких оптимальна по  $J$  пара  $\{\Sigma^*, \beta^*\}$  визначається за умови

$$\{\Sigma^*, \beta^*\} = \arg \min_{\{\Sigma_k, \beta_k\}} J\{\Sigma_k, \beta_k\}.$$



3. *Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (асі)* реалізують РП  $\{\beta_k, \alpha_k\}$  щодо  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ .

Так, системи [11, 3, 26], що використовують прискорений градієнтний спуск  $\{\beta_k\}$  по  $J$ , як  $\alpha_k$  мають параметр регуляризації, що оптимізується за допоміжної умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень похибок для двох однотипних моделей, що налаштовуються однаковими алгоритмами  $Opt$ , але відрізняються параметром  $\alpha$ : для першого  $\alpha = \alpha_k$ , для другого  $\alpha = \alpha_k + \Delta$ , де  $\Delta > 0, \alpha_k > 0$ .

4. *Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (АСІ)* реалізують РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$  щодо показника  $J$  при постійному  $Opt$  і порожній множині  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\}$ ,  $F = J$ . Наприклад, системи вибору «найкращої регресії», при оцінюванні вектора  $\beta$ , який розширюється за розмірністю, із застосуванням регуляризувального параметра  $\alpha$ , який підбирається за алгоритмом гребеневої регресії [7].

5. *Багаторазово адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (басі)* реалізують щодо основного показника  $I$  РП  $\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{kn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ ; тобто  $Q_k = \{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{\{I_k\}, \{I\}\}$ . Поняття багаторазовості пов'язано з повторенням РП  $\{\beta_{kn}\}$  для кожного елемента  $\{Opt_k, \alpha_k, I_k\}$  РП більш високого рангу.

Часто кожному показнику  $J_k$  відповідає конкретний метод  $Opt$  або для евристичних алгоритмів показник  $J_k$  взагалі відсутній, тоді відносно  $I$  оптимізується пара «метод — його параметри»  $\{Opt_k, \alpha_k\}$ .

Прикладом може слугувати система «БАСІ-1» [5; 10], у якій для заданої за одним із п'яти показників  $I$  (або їх зваженої суми), що включають критерії регулярності та незміщеності [7], точності

прогнозування по моделі і т. ін., із семи методів  $\{Opt_k\}$  і їх параметрів  $\{\alpha_k\}$  — визначався оптимальний елемент  $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$  згідно з пп. 5, а і б.

6. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі [16] (**БАСІ**) реалізують відносно головного показника  $I$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$  у вигляді композиції двох РП:

а) РП  $\{\beta_{kn}\}$   $n = 1, 2, \dots$ , щодо  $J_k$ ;

б) РП  $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, I_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , щодо  $I$ , тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{\{I_k\}, I\}$ , де  $I$  — показник більш високого рівня.

Прикладом БАСІ (для одноелементної множини  $\{Opt\}$ ) є системи, побудовані на основі методу групового обліку аргументів [7], у яких структуру  $\Sigma$  і параметри  $\beta$  підбирають з умови екстремуму  $I$ . За інших рівних умов обґрунтоване [10] розширення множини  $\{Opt_k\}$  дозволить отримати моделі, більш ефективні за критерієм  $I$ .

Якісною відмінністю систем за пп. 5, 6 є їх цілеорієнтація на показник  $I$ , який регулює і оптимізує задачу вибору  $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ . У багаторазово адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1–4 питання: *як оцінити якість моделі, отриманої в результаті ідентифікації* [43]? Якість моделі оцінюють за показником  $I$ . Це найбільш об'єктивна оцінка, оскільки найкраща та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником  $I$ .

7. Системи керування, що самоорганізуються (СС) реалізують щодо деякого показника  $\Lambda(I)$  РП  $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$ , у вигляді композиції трьох РП:

а) РП,  $\{\beta_{qkn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $q$  і  $k$  постійні), щодо  $J_{qk}$  зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \arg \text{extr}_{\beta_{qkn}} J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, Opt_{qk}, \alpha_{qk}) = \arg J_{qk}^* ;$$

б) РП  $\{J_{qk}^*(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk})\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $q$  постійне), щодо  $I_q$  зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q) = \arg \text{extr } I_q(J_q^*) = \arg I_q^*;$$

в) РП  $\{J_q^*(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q)\}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , щодо показника  $\Lambda$  більш високого рівня зі стаціонарною точкою

$$I^* = \arg \text{extr } \Lambda(I_q^*) = \arg \Lambda^*,$$

тобто  $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ ,  $F = \{J, I_k\}$ .

**Приклад 1.1.** Задача вдосконалення процесу автоматизованого керування складним енергетичним агрегатом.

Нехай  $\Lambda$  — показник ефективності підприємства  $\{I_q\} = \{I_1, I_2\}$ ;  $I_1$  — показник якості стабілізації технологічних змінних  $x$  агрегату в області робочих режимів  $x_0$ , що задаються експертами (технологами);  $I_2$  — показник якості роботи агрегату;  $\{J_{qk}\}$  — множина показників якості ідентифікації локальними моделями  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , що відображають перетворення управління  $u$  в  $x$  ( $k = 1$ ), і моделями якості  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що відображають перетворення  $u$  в  $I_2$  ( $k = 2$ ).

На першому етапі автоматизації ( $I_q = I_1$ ) за  $J_{1k}$  визначають локальні моделі  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  за допомогою найпростіших методів ідентифікації  $\{Opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$ . За моделями  $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$  підбирають локальні регулятори, стабілізуючі  $x$  в області  $x_0$  за критерієм мінімуму  $I_1$ . Згідно РП пп. 7а, 7б визначають оптимальний по  $I_1$  елемент.

На другому етапі, після автоматизації процесу збирання і обробки інформації, переходять до побудови більш повної моделі  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , що пов'язує  $I_2$  зі змінними  $x, u$ . По моделям  $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$ , які містять в собі моделі  $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$ , уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення  $x_0^*$  робочих режимів  $x_0$ .

Далі оптимальний (вже за  $I_2$ ) елемент  $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, Opt_2^*, \alpha_2^*\}$  визначають уже за результатом РП пп. 7а, 7б. Таким чином, перехід від  $\Sigma_1$  до  $\Sigma_2$  привів до заміни (згідно РП п. 7в) основного показника  $I_1^*$  на  $I_2^*$ .

## 1.2. Багаторівнева декомпозиція систем ідентифікації ЕТО

Декомпозиція є зручним прийомом, що дозволяє точно або наближено представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою більш простих підсистем, які краще піддаються формалізації. Уявімо (рис. 1.1) завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління реальним ЕТО у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем:

- оптимального управління реальним ЕТО;
- ідентифікації відображення вхід—вихід ЕТО;
- ідентифікації сигналів ЕТО.

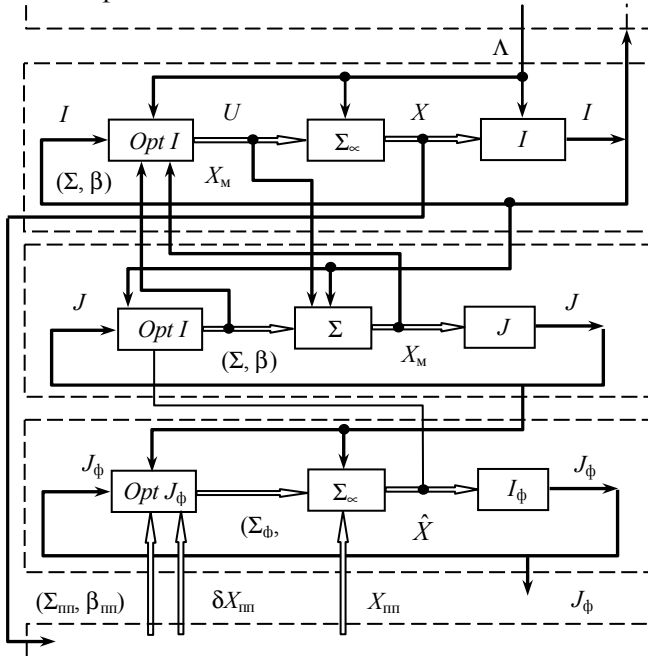


Рис. 1.1. Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

Елементи всередині кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, працюючу за алгоритмом систем зі зворотнім зв'язком:

- видача керуючого впливу на ЕТО;

- вимір або розрахунок реакції ЕТО;
- оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її рівня.

Між собою підсистеми об'єднані прямими (знизу вгору) і зворотними (згори вниз) зв'язками. Крайні підсистеми об'єднані такими самими зв'язками з не розглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв'язків.

*Підсистема ідентифікації сигналів ЕТО* має такі елементи та зв'язки:

$J_\Phi$  — формувач показника якості ідентифікації (фільтрації) вектора  $x$  сигналів об'єкта;

$\Sigma_\Phi$  — фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача  $X_{\text{пп}}$  в його оцінку  $\hat{X}$ ;

$\text{Opt } J_\Phi$  — оптимізатор по  $J_\Phi$  структури  $\Sigma_\Phi$  і вектора  $\beta_\Phi$  параметрів фільтра;

$\Sigma_{\text{пп}}$ ,  $\beta_{\text{пп}}$  — інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів (датчиків) фізичних змінних об'єкта  $\Sigma_\infty$  — передаюча функція датчика, статична (тарувальна) характеристика і т. д.;

$\delta X_{\text{пп}}$  — інформація про похибки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та ймовірнісні характеристики (закон розподілу, його параметри, кореляційні функції і т. д.);

$J$ ,  $J_\Phi$  — інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкта і його сигналів:  $J$  надходить по каналу зворотного зв'язку в дану підсистему,  $J_\Phi$  — в підсистему первинних перетворювачів.

*Підсистема ідентифікації ЕТО* містить:

$J$  — формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

$\Sigma$ ,  $\beta$  — модель об'єкта зі структурою  $\Sigma$  і вектором  $\beta$  параметрів;

$\text{Opt } J$  — оптимізатор за показником  $J$  структури  $\Sigma$  і вектора  $\beta$  параметрів моделі;

$\Sigma_\infty$ ,  $\beta_\infty$ ,  $\hat{X}$  — інформація про фільтр і оцінку  $\hat{X}$  сигналу  $X$ , отриману з сигналу  $X_{\text{пп}}$  первинного перетворювача;

$\Sigma$ ,  $\beta$ ,  $X_m$  — інформацію про модель  $(\Sigma, \beta)$  об'єкта управління і оцінку  $X_m$  сигналу  $X$ , отриману за сигналом  $\hat{X}$  фільтра;

$I$ ,  $J$  — коригувальні зворотні зв'язки з системи управління в систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта в систему ідентифікації сигналів.

*Підсистема оптимального управління ЕТО містить:*

$I$  — формувач показника якості управління;

$\Sigma_{\infty}$  — реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні  $u$  і  $x$ );

$Opt I$  — оптимізатор показника  $I$  по керуючому впливу  $u$ ;

$x$  — вихід ЕТО — вхід підсистеми первинних перетворювачів;

$u$  — вхід ЕТО і моделі;

$\Lambda$ ,  $I$  — коригувальні зворотні зв'язки із системи більш високого рівня в систему управління і з системи управління в систему ідентифікації відповідно.

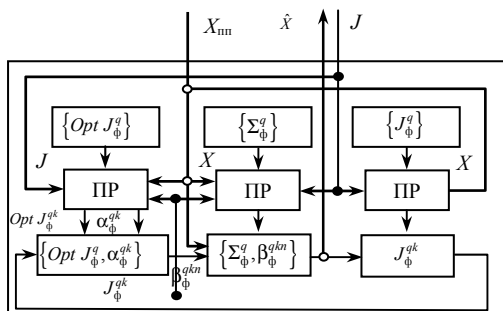
Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

- безпосередньо елемент, зав'язаний на розв'язанні своєї задачі;
- множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;
- проектор (ПР), що вибирає з множини елементів оптимальний за показником якості системи більш високого рангу.

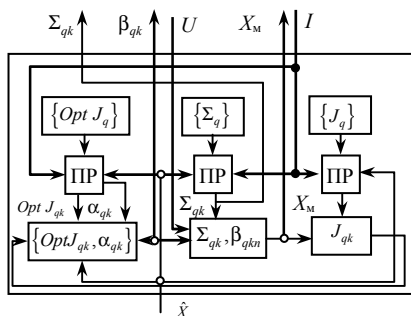
На рис. 1.2 подано схеми задач проектування і самі системи I, II і III рівнів. Індеси  $q$ ,  $qk$ ,  $qkn$  відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад,  $q$  — номер ітерації зміни виду показника  $I$ ;  $qk$  — відповідно зміни  $J$ ;  $qkn$  — номер кроку в оптимізації  $\beta$  в системі ідентифікації об'єкта.

Уся система складається з 27 елементів, серед яких елементи  $\{Opt J_{\Phi}^q\}$ ,  $\{Opt J_q\}$ ,  $\{Opt I_q\}$  — множини методів оптимізації, критеріїв  $\{J_{\Phi}^q\}$ ,  $\{J_q\}$ ,  $\{I_q\}$  і моделей  $\{\Sigma_{\Phi}^q\}$ ,  $\{\Sigma_q\}$ ,  $\{\Sigma_{\infty}^q\}$ , складаються з множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію теоретично існує єдиний оптимальний набір цих елементів і їх параметрів. Завдання полягає у виборі «відповідного» (близького за  $I_q$  до оптимального) набору за обмежених витратах на його пошук в системі. Для повної апіорної невизначеності про всі елементи системи та їх властивості проблема знаходження «підходящого» набору може здійснюватися методом перебирання варіантів. Повне перебирання гарантує відшукання оптимального набору, якщо в критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, то вони впливають на оптимальність рішення. Тому, для того щоб дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх еле-

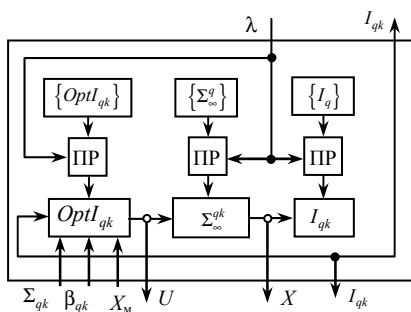
ментів, який дозволяє з допомогою проекторів ПР систем кожного рівня (рис. 1.2) істотно звужити вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.



a



б



в

Рис. 1.2. Цілеорієнтована підсистема:  
а — ідентифікації сигналів; б — ідентифікації об'єкта;  
в — оптимального адаптивного керування об'єктом

*Принцип декомпозиції* ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до створюваної системи призвела до розв'язання на практиці задачі декомпозиції цього неформалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і розв'язанням багатокритеріальної задачі оптимізації. Таке розв'язання не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від оптимізованих змінних. Остаточний варіант розв'язання, що обирається проектувальником, належить цій підмножині.

Найпоширеніші принципи декомпозиції для методів оптимізації ЕТО:

- метод покоординатної оптимізації  $I$  (метод Гаусса–Зейделя), а також метод групової релаксації реалізують декомпозицію простору оптимізованих змінних і почергової покоординатної або групової оптимізації;

- для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління ЕТО декомпозиція загальної задачі на підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [42] дозволяє суттєво спростити складну задачу дуального [39] управління;

- для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних ЕТО (розширений фільтр Калмана [35], метод квазілінеаризації і інваріантного занурення [42]), поділ (декомпозиція) на незалежні підзадачі оцінювання сигналів, їх коваріаційних матриць, а далі параметрів, дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Особливу зацікавленість являє задача декомпозиції моделі (1.1) ЕТО, яка описана системою нелінійних нестационарних рівнянь

$$\dot{x}_g(t) = f_g(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad g = \overline{1, n}, \quad (1.5)$$

множиною лінійних систем (1.2), що описують з необхідною точністю поведінку системи (1.1) в обмежених областях визначення змінних  $t, x, u$ . Ці локальні моделі виду (1.2) дають змогу у межах лінійно-пропорційних систем легко розв'язувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації.



За локальними моделями ЕТО можна розв'язати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності  $F$  моделі (1.1). Уведемо в (1.5) позначення вектора  $v$  з компонентами  $v_i$ :

$$v_i = \begin{cases} x_i, i = \overline{1, n}; \\ u_i, i = \overline{n+1, n+m}; \\ t, i = n+m+1 = s. \end{cases} \quad (1.29)$$

У силу безперервності і  $l$ -кратної диференційованості залежності (1.1) залежність (1.5) може бути подана кратним рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} y(v(t)) = y(v_0) + \sum_{i=1}^s \frac{\partial y}{\partial v_i} \bigg|_{v_0} \Delta v_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \bigg|_{v_0} \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k + \dots + R_l(v), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $\Delta v_i(t) = v_i(t) - v_{i0}$ ;  $v \in G$ ;  $v_0 \in G$ .

$\sup R_l(v) \leq \delta$ ;  $\delta$  — допустима похибка апроксимації залежності (1.1) рядом (1.7).

Розіб'ємо область  $G$  завдання змінних  $v$  на підобласті  $G_r$  так, що

$$a) \bigcup_{r=0}^m G_r = G, v_{r0} \in G_r, G_r \cap G_{r'} = \emptyset, r \neq r';$$

$$б) (\forall G_r) \left( \exists \beta_r = \arg \min_{\beta_r \in R} \left( \sup_{v_{r0} \in G_r} \left\| \frac{dy}{dx} \right\|_{v_{r0}} \beta_r < h \right) \right),$$

де  $\beta_r$  — вектор параметрів лінійної моделі

$$\Delta y_1(t) = \beta_r^T \Delta v(t), \quad (1.8)$$

де  $i$ -а компонента  $\beta_{ri}$  якого є оцінка з точністю до  $h$  коефіцієнта  $\frac{\partial y}{\partial v} \bigg|_{v_0}$ , розкладання (1.7) навколо центру  $v_{r0}$ .

Для області  $G_0$ , яка містить глобальний центр  $v_0$  розкладання (1.7) за моделлю (1.8) і даними  $y_1(t)$ ,  $v(t)$ , знайдемо вектор  $\beta_r$ , який дорівнює (з точністю до  $h$ ) вектору  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$ , тобто отримаємо оцінки перших похідних у  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$  (1.7).

Аналогічно обчислимо вектори  $\beta_r$  часткових моделей (1.8) для решти областей  $G_r \in G$ . Тепер за значеннями  $\beta_r$  і  $v_{r0}$  можна оцінити похідні більш високих порядків.

Так, якщо об'єднати сусідні з  $G_0$  підобласті в розширену  $G_{01} = \bigcup_{r=1}^{m_1} G_r$ ,  $m_1 \geq s$ , (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від «центральної»  $G_0$ ), таку, що

$$\sup_{v \in G_{0j}} R_3(v) \leq \delta,$$

то розклад (1.7), з точністю до  $\delta$ , буде містити члени не вище другого порядку.

Продиференціюємо (1.7) в області  $G_{01}$  по  $v_j$ , тоді (з точністю до  $\partial R_3(v)/\partial v_j$ )

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} = \frac{\partial y}{\partial y_j} \Big|_{v_0} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \Big|_{v_0} \Delta v_i, \quad (1.9)$$

де  $\frac{\delta y}{\delta v} \Big|_{v_0}$  визначено з (1.8) для підобласті  $G_0$ .

Якщо різниця  $\Delta v_i = v_{r0i} - v_{0i}$ , то їй наближено відповідає похідна

$$\frac{\partial y(v(t))}{\partial v_j} \Big|_{v_{r0}} \approx \beta_{rj}.$$

Отже, вираз (1.9) можна подати у вигляді

$$\beta_{rj} = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^s \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_0} (v_{r0i} - v_{0i}). \quad (1.10)$$

Звідси для  $r \geq s$  і, за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  з  $r$  векторів  $(v_{r0} - v_0)$  однозначно визначають  $s$  других похідних

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_0}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Для знаходження всіх коефіцієнтів  $\frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \bigg|_{v_0}$  ряду (1.7)

необхідно мати не менше  $s$  розширених навколо  $G_{r1}^*$  підобластей  $G_{r1}^*$ , подібних  $G_{01}$  (число таких центральних підобластей повинно бути не менше  $s$ ).

Для кожної  $G_{r1}^*$  із рівняння (1.10) (у якому замість  $\beta_{0j}$  і  $v_{0i}$  взято значення, отримані для центральної підобласті  $G_{r*}$ ) знаходять

другі похідні  $\frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_{r*0}}$ . Двічі диференціюючи (1.7), отримаємо

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_{r*0}} = \frac{\partial^2 y}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{v_0} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial^3 y}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \bigg|_{v_0} (v_{r*0k} - v_{0k}).$$

Звідси для  $r^* \geq s$  і за умови лінійної незалежності хоча б  $s$  векторів  $(v_{r*0} - v_0)$  однозначно визначають треті похідні. Аналогічно отримують всі похідні ряду (1.7) і тим самим визначають його структуру.

За недостатньої кількості підобластей  $G_r$  можливо відновлення частини структури з тих  $v_j$ , які змінюються від області до області.

Під час проведення активного експерименту мінімізація числа областей  $G_r$  і оптимізація точності оцінок похідних в (1.7) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, яке забезпечує ортогональність векторів  $(v_{r0} - v_0), (v_{r*0} - v_0)$ .

Перевагою такого підходу є обмежена (на кожному кроці розширення) розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (1.7) і відкидання незначущих.

**Приклад 1.2.** Нехай невідома двомірна залежність (1.5) в ЕТО має вигляд

$$y(v) = v_1(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t),$$

де змінні  $y(v), v_i(t)$  визначені так:  $(v_{01}=0, v_{02}=0) \in G_0$ ;  $(v_{11}=-1, v_{12}=0) \in G_1$ ;  $(v_{21}=0, v_{22}=-1) \in G_2$ ;  $y(0)=0$ .

У кожній області є по два вимірювання  $v_i(t_{jr})$ , відхилення яких від центрів для кожної області однакові:  $\Delta v_1(t_{1r})=0,1$ ;  $\Delta v_2(t_{1r})=0$ ;  $\Delta v_1(t_{2r})=0$ ,  $\Delta v_2(t_{2r})=-0,1$ .

Враховуючи ці відхилення, отримуємо  $\Delta y(t_{10})=0,1$ ;  $\Delta y(t_{20})=0,005$ ;  $\Delta y(t_{11})=0,1$ ;

$$\Delta y(t_{20})=0,055$$
;  $\Delta y(t_{12})=0,5$ ;  $\Delta y(t_{22})=0,105$ .

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності  $y(v)$ .

*Розв'язання:*

а) для  $G_0$  складемо рівняння (1.8)

$$\Delta y(t_{j0}) = \beta_{01} \Delta v_i(t_{j0}) + \beta_{02} \Delta v_2(t_{j0});$$

підставивши дані, отримаємо

$$0,1 = \beta_{01} \times 0,1 + \beta_{02} \times 0; \quad 0,005 = \beta_{01} \times 0 + \beta_{02} \times (-0,1);$$

Звідси маємо шукані перші члени ряду (1.7):

$$\beta_{01} = 1; \quad \beta_{02} = -0,05;$$

б) для  $G_1$ :

$$\Delta y(t_{j1}) = \beta_{11} \Delta v_1(t_{j1}) + \beta_{12} \Delta v_2(t_{j1}),$$

звідси  $\beta_{11} = 1$ ;  $\beta_{12} = 0,55$ ;

в) для  $G_2$ :

$$\Delta y(t_{j2}) = \beta_{21} \Delta v_1(t_{21}) + \beta_{22} \Delta v_2(t_{j1});$$

звідси  $\beta_{21} = 0,5; \beta_{22} = 1,05$ ;

г) маючи  $\beta_{ir}$ , можна, згідно з рівнянням (1.10), переходити до знаходження оцінок других похідних у (1.7):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_1} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}),$$

де ліворуч різниця  $\beta_{r1}$ ,  $r = 1, 2$ , і  $\beta_{01}$ , а  $(v_{r0j} - v_{0j})$ ,  $j = 1, 2$  — різниця координат центрів  $r$ -й і нульової області.

Аналогічно друге рівняння

$$\left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_{r0}} - \left. \frac{\partial y}{\partial v_2} \right|_{v_0} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \right|_{v_0} (v_{r02} - v_{02}) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} (v_{r01} - v_{01}).$$

Підставивши дані для першого рівняння, отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times (-1) + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times 0; \\ -0,5 &= \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1^2} \right|_{v_0} \times 0 + \left. \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{v_0} \times (-1). \end{aligned} \right\}$$

Її розв'язання відразу вказує (!) на відсутність квадратичної залежності від  $x_1$ :

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(y(j+l))x_k(j) + y(j)x_k(j+l)].$$

Аналогічно, із другого рівняння

$$\begin{cases} 0.5 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot 0 + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \cdot (-1); \\ -1 = \frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} \times (0); \end{cases}$$

отримаємо рішення

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v_2^2} \Big|_{v_0} = 1; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v_1 \partial v_2} \Big|_{v_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (1.7). Враховуючи, що  $v_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , знаходимо оцінку  $\hat{y}(v)$  невідомої залежності  $y(v)$ :

$$\hat{y}(v) = v_1(t) - 0,05v_2(t) + 0,5v_1(t)v_2(t) + v_2^2(t).$$

Оцінка  $\hat{y}(v)$  відрізняється від  $y(v)$  на несуттєву для області  $G$  величину —  $0,05v_2(t)$ , яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і під час опису сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів. Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам ЕТО, для незалежного вивчення його статистики та динаміки; виділення сильно- і слабозашумлених ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів і алгоритмів оцінювання сигналів; виділення «інформативних» (в сенсі ідентифікації моделі ЕТО) ділянок записів з некорельованими або ортогональними змінними.

Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів ЕТО в ряд Фур'є. Перехід в частотну область дозволить достатньо просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [35]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [3] також заснована на розкладанні сигналів і їх функціональних відображень. Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція сигналів складних коливальних ЕТО дозволяє виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі. Отже, принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних ЕТО.

### 1.3. Принцип узгодженості критеріїв якості підсистем складного ЕТО

Для ієрархічної системи управління (див. рис. В.1) існує одне значення для елементів множини

$$\{I, Opt I, J, Opt J, \Sigma, \beta, I_{\phi}, Opt I_{\phi}, \beta_{\phi}, I_{nn}, Opt I_{nn}, \beta_{nn}\},$$

за якого головний показник  $\Lambda$  оптимальний, якщо не враховувати витрати на пошук цього значення. Але реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати ці втрати. Тому релаксаційний процес відшукування абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на певному етапі, якщо подальший приріст втрат на пошук перевищить зменшення решти частини функціоналу.

За повної відсутності інформації про залежність  $\Lambda$  від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується методом перебору: з усіх  $n$  можливих значень  $m$  змінних множини  $F$  вибирається  $m$  оптимальних значень. Загальне число кроків РП

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ для реальних значень } m \text{ і } n \text{ надмірно велике.}$$

Задача набагато порядків спрощується, якщо кожен з функціоналів  $\Lambda, I, \dots, I_{nn}$  оптимізується на підмножині змінних свого рівня:  $X, u, \dots, (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})$ . Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень

$$\begin{aligned} \Lambda^* &= extr \Lambda \\ x|_{I^*=extr I} \\ u|_{J^*=extr J} \\ (\Sigma, \beta)|_{J_{\phi}^*=extr J_{\phi}} \\ (\Sigma_{\phi}, \beta_{\phi})|_{J_{nn}^*=extr J_{nn}} \\ (\Sigma_{nn}, \beta_{nn})|_{\dots}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де ліворуч від кожної вертикальної риски змінна, що оптимізує функціонал «свого» рівня, праворуч — результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить суворій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму.

Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (1.11).

Щоб процедура (1.11) давала рішення, близьке до абсолютно-го екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити не-протирічність критеріїв  $\Lambda, I, \dots, J_{\text{пп}}$ .

Критерії  $\Lambda, I, \dots, J_{\text{пп}}$  називають *абсолютно узгодженими*, якщо композиція умовних рішень (1.11) призводить до глобального екстремуму головного показника  $\Lambda$ .

Два сусідніх за рівнями функціонала назовемо *локально несуперечливими*, якщо їх варіації подібні в обмеженій області  $G$  простору змінних підсистеми нижнього рівня:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Lambda(u + \delta u) &= k_1 \delta I(u + \delta u); \\ \delta I(\beta + \delta \beta) &= k_2 \delta J(\beta + \delta \beta); \\ \delta J(\beta_{\phi} + \delta \beta_{\phi}) &= k_3 \delta J_{\phi}(\beta_{\phi} + \delta \beta_{\phi}); \\ \delta J_{\phi}(\beta_{\text{пп}} + \delta \beta_{\text{пп}}) &= k_4 \delta J_{\text{пп}}(\beta_{\text{пп}} + \delta \beta_{\text{пп}}). \end{aligned} \right\}$$

Якщо перетин областей  $G_i$  існування змінних  $i$ -х рівнів представляє не порожню множину, яка включає точку, що визначає глобальний екстремум за  $\Lambda$ , то їх багаторазова послідовна оптимізація від  $J_{\text{пп}}$  до  $\Lambda$  та назад від  $\Lambda$  до  $J_{\text{пп}}$  в принципі дозволяє відшукати глобальний екстремум  $\Lambda$ .

Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що оптимально будувати функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал  $I$  управління  $u$  на об'єкті  $\Sigma_{\infty}$  не знаючи якою математичною моделлю  $(\Sigma, \beta)$  він буде описаний, який рівень і вид шумів є в оцінках  $X_m$ , отриманих за оцінками підсистеми фільтрації і т. д.

Можна застосувати мінімаксий підхід [39], і будувати  $I$  так, щоб для найгіршої моделі  $(\Sigma, \beta)$  та оцінок  $X_m$  сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (див. рис. В.1) є підсистема ідентифікації, яка в результаті оптимізації



дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи міні-максний підхід, програємо в оптимальності.

Доцільним є наступний алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1. На підставі апріорної інформації про об'єкт  $\Sigma_{\infty}$ , головний функціонал  $\Lambda$  і наявних елементах підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [15] на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів оцінювання сигналів  $X$  і моделі  $(\Sigma, \beta)$  і оптимального управління  $u$ .

2. Вибрані підсистеми  $i$ -го рівня оптимізують методом перебору структур і методів оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем  $i + 1$ -го рівня:  $\Sigma_{\text{пп}}$  по  $J_{\phi}$ ,  $(\Sigma_{\phi}, \text{Opt}J_{\phi})$  по  $J$ ,  $(\Sigma, \text{Opt}J)$  по  $I$ ,  $(\text{Opt}I)$  по  $\Lambda$ . Оскільки розмірності цих змінних невеликі, то витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримаємо оптимальну систему першого наближення.

3. Методами теорії чутливості, або моделювання і планування експерименту [20], проектують несуперечливі критерії  $I, J, J_{\phi}, J_{\text{пп}}$ .

Розглянемо підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай є оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт  $\Sigma_{\infty}$  замінено його моделлю  $(\Sigma, \beta)$ . Знайдемо варіацію основного функціоналу  $\Lambda$  відносно його екстремального значення  $\Lambda^*(u^*)$ , викликану варіацією  $\delta u$  оптимального управління об'єктом. Нехай

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon \delta u(t),$$

$$\text{де } \varepsilon \text{ — мала величина; } u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \text{ — вектор-функція часу } t.$$

Нехай

$$\Lambda(u(t)) = \int_{\theta_1} \lambda(u^*(t) + \delta u(t) \varepsilon) dt,$$

де  $\int_{\theta_1}$  — оператор інтегрування на інтервалі  $\theta_1$  часу  $t$ ;  $\lambda(\cdot)$  — скалярна функція векторного аргументу  $u$ .

Знайдемо першу варіацію  $\Lambda$ :

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\epsilon} = \int_{\theta_1} \frac{\partial\lambda}{\partial\epsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \frac{\partial u}{\partial\epsilon} dt = \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt,$$

де

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\epsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial\epsilon} \end{bmatrix}.$$

Тепер візьмемо другу варіацію:

$$\begin{aligned} \delta^2\Lambda &= \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\epsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\epsilon} \frac{\partial\Lambda}{\partial\epsilon} = \frac{\partial}{\partial\epsilon} \int_{\theta_1} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u dt = \\ &= \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial\epsilon} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \cdot \delta u \cdot dt = \int_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial\lambda}{\partial u} \right)^T \delta u \right]^T \frac{\delta u}{\partial\epsilon} dt, \end{aligned} \quad (1.12)$$

де

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \dots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо  $\Lambda$  визначено на  $x(t)$ , а не на  $u(t)$ , то, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta x^T \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^T \partial x} \delta x dt,$$

або

$$\delta^2 \Lambda = \int_{\theta_1} du^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u dt, \quad (1.13)$$

де

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u,$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (1.12) і (1.13), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^T \partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

На екстремалі  $x^*(t)$ ,  $u^*(t)$  перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (1.12) або (1.13) визначає еталонну [для функціонала  $I(u)$ ] поверхню у функціональному просторі варіацій  $\delta u(t)$ . Нехай  $\delta u(t) = 1(t)$  — одинична вектор-функція від  $t$ , тоді (1.13) являє еталонну для  $I$  матрицю  $A_1$  дійсних чисел

$$\delta^2 \Lambda = A_1 = \int_{\theta} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} dt. \quad (1.14)$$

Під час побудови функціонала  $I$  будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів  $\Lambda$  та  $I$  співпали, а другі варіації були подібні.

Тут також можна досягти скорочення кількості різних варіантів, застосовуючи методику планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціонала від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються.

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації ЕТО до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію  $\Lambda$ ).

#### **1.4. Композиція підсистем різних рівнів ЕТО в єдину систему**

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних по головному показнику  $\Lambda$  структури і алгоритмів функціонування багаторівневої системи оптимізації, наприклад, ЕТО, є етап композиції (сполуки) окремих підсистем в єдиний комплекс.

Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципу раціонального ускладнення [14] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції. Це:

- упорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи першого наближення і закінчуючи оптимальною за  $\Lambda$ .

Упорядкування елементів підсистем реалізується проекторами ПР, звужуючими на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножин претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими за неповної прямої спостережуваності змінних об'єкта  $\Sigma_{\infty}$  є методи ідентифікації, які не потребують повної спостережуваності  $\Sigma_{\infty}$ . На першому рівні проектори ПР<sub>1</sub> виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані в цій ситуації, яка визначається сигналами  $\hat{u}, \hat{x}$ , що спостерігаються, і заданими критеріями  $J_{\phi}, J, I, \Lambda$ . Тут проектори є багатовимірними дискримінаторами, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію. На другому рівні проектори ПР<sub>2</sub> виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього в проекторі ПР<sub>2</sub> для кожного елемента закладено

регресійні залежності відповідних критеріїв  $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$  від кількісно розрахованого вектора факторів  $\theta$ , який характеризує конкретну ситуацію.

Для елементів-методів лінійного оцінювання чинниками є співвідношення сигнал-шум за амплітудою і шириною спектрів, корельованість сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої похибки апроксимації) і та ін.

Визначивши в просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують регресійну залежність відповідного критерію  $J_\phi, \dots, \Lambda$  або його оцінки  $\hat{J}_\phi, \dots, \hat{\Lambda}$  від  $\theta$ . Тоді проектор  $PP_1$  визначає область, а  $PP_2$  — для кожного елементу значення критерію для конкретного  $\theta$ , що належить цій області. Задача побудови проекторів відноситься до етапу проектування і вимагає тим більших витрат, чим точніше проектори і ширше області та розмірності факторів  $\theta$ .

Вибір оптимальної системи першого наближення було подано вище. Основним процесом на цьому етапі є організація структури системи.

Розглянемо варіант структури системи оптимізації  $J$ , тобто систему ідентифікації. У табл. 1.1 структурно систематизовані підсистеми ідентифікації від найпростішої до такої, що самоорганізується для створення підсистеми ідентифікації в багаторівневій системі оптимізації головного показника  $\Lambda$  (якщо  $\Sigma^*$  і  $Opt^*$  апріорно невідомі).

Із табл. 1.1, як припустимо, приймаємо структуру БАСІ. Для цієї системи ідентифікації, на відміну від більш простих, характерна замкненість по основному (для неї) критерію  $I$  і неединичність елементу  $\Sigma$ .

Складемо функціональну схему БАСІ, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 1.3).

Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано: 1 — оптимізація  $\Lambda$ ; 2 — оптимізація  $I$ ; 3 — оптимізація  $J$ , що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4); 5 — оптимізація  $J_\phi$ .

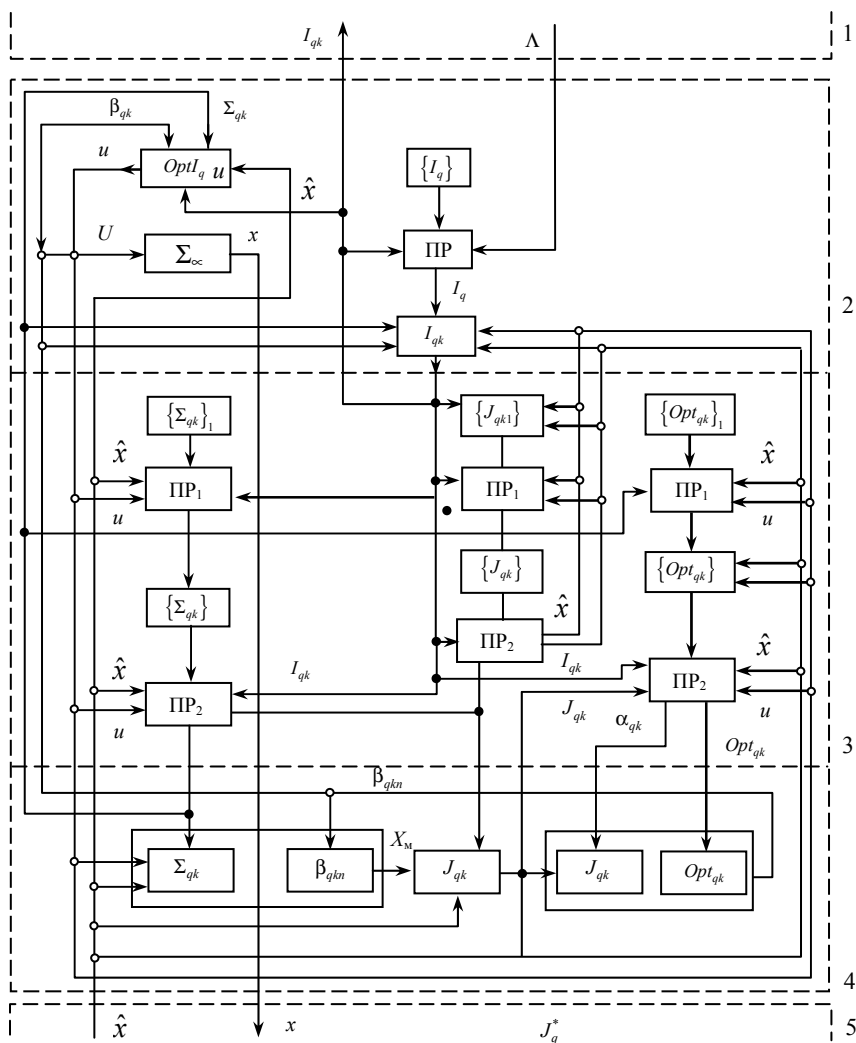


Рис. 1.3. Функціональна схема багатократно адаптивної підсистеми ідентифікації

Частина 4 системи містить функціонал  $J_{qk}$ , який задається вище, модель  $\Sigma_{qk}$  з вектором  $\beta_{qkn}$ , параметрів, що налаштовуються, оптимізатор  $(Opt_{qk}, \alpha_{qk})$ . Тут реалізується РП  $\{\beta_{qkn}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

щодо  $J_{qk}$  за допомогою оптимізатора  $Opt_{qk}, \alpha_{qk}$ . Після закінчення РП інформація про оптимальні за  $J_{qk}$  структурі  $\Sigma_{qk}$  і векторі  $\beta_{qk}$  параметрів моделі надходить у підсистеми верхніх рівнів.

Частина 3 містить три множини  $\{\Sigma_{qk1}\}, \{Opt_{qk1}\}, \{J_{qk1}\}$ ; проєктори першого рівня  $PP_1$ , що звужують ці множини до підмножин  $\{\Sigma_{qk}\}, \{Opt_{qk}\}, \{J_{qk}\}$  допустимих елементів; проєктори  $PP_2$  другого рівня, що вибирають з числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду  $I_q$  і потрібного значення  $J_{qk}$ , що задається вище, проєктори  $PP_1, PP_2$  задають елементи  $J_{ql}, \Sigma_{ql}, Opt_{ql}, \alpha_{ql}$  частини 4, де в результаті РП  $\{\beta_{qkn}\}$  отримують оптимальну по  $J_{qk}$  модель  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ . У підсистемі частини 2 на реальному об'єкті  $\Sigma_\infty$  або його моделі  $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$  оцінюється значення критерію  $I_{qk}$  для  $k$ -й структури БАСІ, і якщо воно не задовольняє необхідному, то в одному з проєкторів  $PP_2$  відбувається зміна претендента. Знову повторюється процес  $\{\beta_{qkn}\}$  і так до виконання умови, що  $I_{qk}$  буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів. При зміні  $I_{qk}$  в частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП  $\{\beta_{qkn}\}$  по  $n$  і  $\{I_{qk}\}$  по  $k$ , що відповідає визначенню БАСІ.

Частина 2 містить реальний об'єкт  $\Sigma_\infty$ , його оптимізатор  $Opt_u I_q$ , множину  $\{I_{qk}\}$  і проєктор  $PP$ , що визначає (на основі значень  $I_{qk}$  і  $\Lambda$ ) вид  $I_q$  критерію  $I_{qk}$ . Сигнал  $x$  з виходу об'єкта  $\Sigma_\infty$  надходить в підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка  $\hat{x}$  потрапляє в системи ідентифікації і управління. Оптимізатор  $Opt_u I_{qk}$  на основі інформації  $\Sigma_{ql}, \beta_{ql}, I_{ql}, \hat{x}$  виробляє керувальний вплив  $u$ , що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи).

Якщо після закінчення РП  $\{\beta_{qk}\}$  по  $k$  оптимальне значення  $I_q$  не задовольняє систему частини 1, то з системи верхнього рівня може надійти команда в проектор ПР на зміну по  $q$  виду функціоналу  $I_q$ . Крок по  $q$  призводить до повторення кроків по  $k$ , а  $k$  по  $n$  в МАСІ, тобто в частинах 1–4 має місце композиція з трьох РП, що відповідає визначенню системи, яка самоорганізується (СС) (див. табл. 1.1).

Глибокий зворотній зв'язок за критеріями від  $\Lambda$  до  $I$ , від  $I$  до  $J$ , від  $J$  до  $J_\Phi$ , оптимізувальний і цілеорієнтований структуру і параметри підсистеми всіх рівнів ЕТО, здійснює регуляризацию рішення в широкому сенсі.

## 1.5. Приклад побудови проекторів ПР<sub>1</sub>, ПР<sub>2</sub> в БАСІ

### 1.5.1. Алгоритми роботи проекторів $Opt_q \rightarrow Opt_{qk}$ в БАСІ

Ефективність системи другого рівня БАСІ визначається потужністю множин  $\{Opt_q\}$  і кінцевим результатом  $\{Opt_{qk}\}$  роботи проекторів ПР<sub>1</sub>, ПР<sub>2</sub>. Оптимальність по  $I_{qk}$  елемента  $\{Opt_{qk}\}$  залежність від правила побудови в проекторах відображення сигналів  $(x(t), u(t))$  об'єкта в індекс  $k$ . Відображення  $(x(t), u(t)) \rightarrow k$  в ПР<sub>1</sub> було реалізовано таблицями з обмеженим входом ( $\chi \in \{0,1\}$ ), а в ПР<sub>2</sub> необмеженим, якщо  $\chi \in R$ ,  $R$  — множина дійсних чисел.

В  $i$ -му рядку таких таблиць розташовані коефіцієнти зв'язку  $i$ -го елемента ( $Opt_i$  або  $\Sigma_i$ ) або його показника якості з  $j$ -ою властивістю даних  $(x(t), u(t))$ . Індекс  $k$  оптимальної підмножини  $\{Opt_{qk}\}$  в ПР<sub>1</sub> знаходиться за умови

$$k = \arg \max_{i \in \{1, r\}} \{\chi \cdot \theta\}, \quad (1.15)$$

де  $\chi$  — матриця бінарних коефіцієнтів  $\chi_{ij} \in \{0,1\}$ ;  $\chi_{ij} = 0$ , якщо ефект впливу  $i$ -го елемента на  $j$ -й фактор негативний і, навпаки,  $\chi_{ij} = 1$ , якщо ефект позитивний;  $\theta$  — вектор бінарних факторів



$\theta_j \in \{0,1\}$ , які вказують на присутність чи відсутність відповідної властивості;  $r$  — потужність множини  $\{Opt_{qk}\}$ .

У проекторі ПР<sub>2</sub> із підмножини претендентів на оптимальність, яка (унаслідок бінарності  $\chi_{ij}$  в ПР<sub>1</sub>) може містити декілька елементів  $\{Opt_{qk}\}$ , відбирається єдиний найкращий  $Opt_k^*$  елемент за умови

$$K^* = \arg \min[\chi \cdot \text{diag}[\eta_j] \cdot \theta], \quad (1.16)$$

де  $\chi$  — матриця  $\chi_{ij}$  коефіцієнтів чутливості показника  $I$  якості  $i$ -го елемента до  $j$ -го фактору;  $\chi_{ij} \in R$ ;  $\eta_j$  — коефіцієнт подібності між тестовим  $\theta_j$  і реальним  $\eta_j$  рівняннями  $j$ -го фактора;  $\theta$  — вектор рівнів тестових факторів.

Для реалізації правила (1.16) побудуємо такий тест.

1. Рівняння тестової моделі

$$y^*(k) = \beta_1^* x_1^*(k) + \beta_2^* x_2^*(k) + \varepsilon_0(k) \theta_6, \quad (1.17)$$

де  $\varepsilon_0(k) \theta_6$  — нев'язка, визначена наближеністю структури моделі (1.17); виміри

$$y(k) = y^*(k) + N_0(k) \theta_1;$$

$$x_1(k) = x_1^*(k) + N_1(k) \theta_2; \quad \beta_1^* = \beta_2^* = 1;$$

$$x_2(k) = x_2^*(k) + N_2(k) \theta_2; \quad k = \overline{1, \theta_5};$$

$$x_1^*(k) = \sin \frac{2\pi k}{M} \theta_7; \quad x_2^*(k) = \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \theta_4 \right);$$

$$\varepsilon_0(k) = \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \theta_7 + \frac{\theta_4}{2} \right);$$

$$N_i(k) = \theta_3 N_i^0(k) + (1 - \theta_3) N_i(k-1); \quad i = 0, 1, 2;$$

$N_i^0(k)$  — гаусів білий шум з одиничною дисперсією.

Фактори та їх рівень:

$\theta_1$  та  $\theta_2$  — рівень перешкод у  $y$  та  $x$ ;

$\theta_3$  та  $\theta_7$  — ширина спектрів сигналу і шуму;

$\theta_4$  — взаємозв’язок оцінок  $\beta_1$  і  $\beta_2$  унаслідок неортогональності  $x_1$  і  $x_2$ ;

$\theta_5$  — представництво вибірок даних;

$\theta_6$  — наближеність моделі (1.17).

### **1.5.2. Методика оцінювання кількісних характеристик метода ідентифікації**

Побудуємо ортогональний план у вигляді адамарової матриці 8-го порядку [51],  $i$ -й рядок якої є  $i$ -ою функцією Уолша (табл. 1.2). Для цього введемо нормовані змінні

$$\bar{\theta}_i = (\theta_i - \theta_{i8}) / \Delta\theta_{i8},$$

де  $i = \overline{1,7}$ ;  $\bar{\theta}_0 = 1$ ;  $\theta_{i8}$  — значення  $\theta_i$  для базового режиму;  $\Delta\theta_{i8}$  — крок варіювання фактора  $\theta_i$ ;  $I_j$  — значення показника якості метода ідентифікації для  $j$ -го набору факторів.

Таблиця 1.2

**Числові значення факторів  $\theta_i$**

№	$\bar{\theta}_0$	$\bar{\theta}_1$	$\bar{\theta}_2$	$\bar{\theta}_3$	$\bar{\theta}_4$	$\bar{\theta}_5$	$\bar{\theta}_6$	$\bar{\theta}_7$	$\bar{I}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	$I_1$
2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$I_2$
3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$I_3$
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$I_4$
5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	$I_5$
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$I_6$
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$I_7$
8	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	$I_8$

У табл. 1.3 наведено числові значення факторів  $\theta_i$ , які відповідають трьом значенням ( $\pm 1, 0$ ) нормованих факторів  $\bar{\theta}_i$ , а також значення відхилень  $\Delta\theta_{i8}$ . Як показник  $I_j$  було прийнято значення

модулів зміщення  $I_{1j}$  і  $I_{2j}$  оцінок  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  плюс три кореня квадратного із оцінок  $I_{3j}^2$  і  $I_{4j}^2$  дисперсій оцінок  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$ :

$$I_j = \frac{|I_{1j}| + |I_{2j}|}{2} + 3\sqrt{\frac{I_{3j}^2 + I_{4j}^2}{2}}, \quad (1.19)$$

$j = \overline{1, 8}$ ;  $\beta_1^* = \beta_2^* = 1$ , якщо  $\overline{\theta_6} = -1$  (точна модель);  $\beta_1^* = \beta_2^* = 1,251$ , якщо  $\theta_6 = 1$  (модель наближена, а коефіцієнти  $\beta_1^*, \beta_2^*$  визначено по МНК за відсутності перешкод у  $y$  і  $x_i$ , тобто  $y = y^*$ ,  $x_i = x_i^*$ ).

Показник (1.19) наближено визначає як зміщення (унаслідок перешкод у  $x(t)$ ), так і три середньоквадратичних відхилення (унаслідок перешкод в  $y(t)$ ).

Базові значення факторів:

$\theta_{1\sigma} = 50\%$  — рівень перешкод у  $y(k)$ ;

$\theta_{2\sigma} = 50\%$  — рівень перешкод у  $x(k)$ ;

$\theta_{3\sigma} = 0,8$  — час автокореляції перешкод ( $5 \div 8$  дискретів  $k$ ); автокореляційна функція експоненційна зі сталою часу  $T \approx \Delta\tau/\theta_3$ ,  $\Delta\tau$  — крок між дискетами  $k$ ;

$\theta_{4\sigma} = 19\pi/120 \approx 28^\circ$  — зсув по фазі між сигналами  $x_1^*(k)$  і  $x_2^*(k)$ ; тоді коефіцієнт кореляції  $r_{x_1 x_2}^* = \cos 28^\circ = 0,87$ .

Якщо модель ЕТО  $n$ -вимірна, то інваріантною до розмірності  $n$  буде величина визначника  $D_1$  кореляційної матриці:

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} r_{x_1 x_1} & \cdots & r_{x_1 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_n x_1} & \cdots & r_{x_n x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Для базового варіанту

$$D_T = \det \begin{bmatrix} 1 & 0,87 \\ 0,87 & 1 \end{bmatrix} = 0,243;$$

$\theta_{5\sigma} = 500$  точок  $k$ ;

$\theta_{66} = 0,25$  (тобто  $\varepsilon_0(k)$  становить 25 % амплітуди  $x_1^*(k)$  і  $x_2^*(k)$  або 12,5 % амплітуди  $y^*(t)$ ).

Комп'ютерний експеримент відповідно до плану (табл. 1.2) виконувався  $m_j$  разів, кожного разу з новими шумами і результати усереднювались.

Далі, внаслідок ортогональності  $\bar{\theta}_i(j)$  по МНК незалежно обчислювались коефіцієнти  $\chi_i$ ,

$$\chi_i = \frac{\Delta\theta_{i6}}{8} \sum_{j=1}^8 I(j) \bar{\theta}_i(j), \quad i = \overline{1,5}, \quad (1.21)$$

регресійної моделі залежності показника (1.19):

$$I(j) = \sum_{i=0}^7 \chi_i \cdot \theta_i(j); \quad j = \overline{1,8}, \quad (1.22)$$

де  $\chi_0$  — значення  $I$  для базового режиму  $\theta_6$ ;  $\chi_1, \chi_2$  — визначають чутливість показника  $I_i$  до перешкод у  $y(k)$  і  $x(k)$ ;  $\chi_3 \div \chi_6$  — відповідно чутливість до змін полоси спектра перешкод, корельованості  $x_i(k)$ , розмірності вибірок даних, неточності структури моделі.

Таблиця 1.3

Комп'ютерний експеримент відповідно до плану

$\bar{\theta}_i$	$\theta_i$	$\Delta\theta_{i6}$
$\bar{\theta}_0 = 1$	1	—
$\bar{\theta}_1 = \begin{cases} +1 \text{ "Сильна" перешкода в } x_1(k) \\ 0 \text{ "Середня" перешкода в } x_1(k) \\ -1 \text{ "Слабка" перешкода в } x_1(k) \end{cases}$	$\theta_1 = \begin{cases} = 1 \\ = 0,5 \\ = 0 \end{cases}$	0,5
$\bar{\theta}_2 = \begin{cases} +1 \text{ "Сильна" перешкода в } x_2(k) \\ 0 \text{ "Середня" перешкода в } x_2(k) \\ -1 \text{ "Слабка" перешкода в } x_2(k) \end{cases}$	$\theta_2 = \begin{cases} = 1 \\ = 0,5 \\ = 0 \end{cases}$	0,5

Закінчення табл. 1.3

$\overline{\theta}_i$	$\theta_i$	$\Delta\theta_{i8}$
$\overline{\theta}_0 = 1$	1	—
$\overline{\theta}_3 = \begin{cases} +1 \text{ співвідношення смуги} \\ 0 \text{ спектрів сигналів} \\ -1 \text{ і перешкод} \end{cases}$	$\theta_3 = \begin{cases} = 0,6 \\ = 0,8 \\ = 1 \end{cases}$	0,2
$\overline{\theta}_4 = \begin{cases} +1 \text{ "Сильна" взаємодія} \\ \text{змінних } x_i \\ 0 \text{ "Середня" взаємодія} \\ \text{змінних } x_i \\ -1 \text{ "Слабка" взаємодія} \\ \text{змінних } x_i \end{cases}$	$\theta_4 = \begin{cases} = \pi/15 \\ = 19\pi/120 \\ = \pi/4 \end{cases}$	$11\pi / 120$
$\overline{\theta}_5 = \begin{cases} +1 \text{ "Мала" вибірка} \\ 0 \text{ "Сильна" вибірка} \\ -1 \text{ "Велика" вибірка} \end{cases}$	$\theta_5 = M = \begin{cases} = 200 \text{ точок} \\ = 500 \text{ точок} \\ = 800 \text{ точок} \end{cases}$	0,3
$\overline{\theta}_6 = \begin{cases} +1 \text{ "Сильно" наближена} \\ \text{модель} \\ 0 \text{ "Наближена наближена} \\ \text{модель} \\ -1 \text{ "Точна наближена} \\ \text{модель} \end{cases}$	$\theta_6 = \begin{cases} = 0,5 \\ = 0,025 \\ = 0 \end{cases}$	0,25
$\overline{\theta}_7 = \begin{cases} +1 \text{ Число періодів основної} \\ 0 \text{ гармоніки корисного} \\ -1 \text{ сигналу на вибірці} \end{cases}$	$\theta_7 = \begin{cases} = 4 \\ = 2,5 \\ = 1 \end{cases}$	2,5

### **1.5.3. Вибір найкращого з множини $\{Opt_{qk}\}$ методу ідентифікації для реальної ситуації**

Шляхом експрес-аналізу оцінюється рівні реальних факторів:

$$\theta_1 = \left( \sum_{k=1}^M (y(k) - \hat{y}(k))^2 / (\hat{y}(k))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де  $\hat{y}(k)$  — прогладжене ковзним середнім значення  $y(k)$ ;  $\theta_2$  — середнє по всім  $x_i(k)$  значення шум-сигнал;  $\theta_3$  — визначається шляхом апроксимації експонентою  $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \cdot e^{-k\Delta t/T}$  автокореляційної функції оцінки перешкоди в  $y(k)$ ; тоді  $\theta_3 = \Delta t / T$ ;  $\theta_4 = \frac{19}{120} \pi \frac{D_1}{D_T}$ ;  $\theta_5$  — кількість  $M$  точок реальної вибірки;  $\theta_6 = [\epsilon^T \epsilon / \hat{Y}^T \hat{Y}]^{1/2}$  — нормови СКО, де  $\epsilon$  — похибка між  $Y$  і  $\hat{Y}$ ;  $\theta_7$  — середній період оцінки  $\hat{y}(k)$  сигналу  $y^*(k)$ :

$$\theta_7 = [5M / (r-1)] / 90,$$

де  $r$  — кількість перетинів  $\hat{y}(k)$  її середнього значення, в базовому варіанті  $2M / (r-1) = 90$ .

Обчисливши експрес-аналізом оцінки  $\theta_i$  реальних факторів, визначаємо значення показника (1.19) для конкретного  $s$ -го метода  $Opt_s$ :

$$I_s = I_0 + \sum_{i=0}^7 \chi_i \cdot \theta_i. \quad (1.23)$$

Як найкращий беруть той метод, для якого показник (1.23) мінімальний. У табл. 1.4 наведені регресійні моделі (1.23) показника  $I$  (1.19) для множини методів ідентифікації (розділ 3 і [32]): МНК — метод найменших квадратів; УМНК — узагальнений МНК; МПК — метод прогнозу кореляцій; МБК — метод багатократного корелювання; МОД — метод однократного ділення; МБД — метод багатократного ділення.

Таблиця 1.4

## Регресійні моделі показника

	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$
Модель МНК								
$J$	0,83	0,72	0,18	-1,9	0,7	1,15	-0,89	-0,15
Модель УМНК								
$J$	0,77	0,89	0,1	-1,37	0,78	1,4	-0,65	-0,08
Модель МПК								
$J$	1,6	-1,17	2,17	-4,53	1,75	-2,05	3,04	-0,48
Модель МБК								
$J$	18,85	-25,7	36,2	-67,8	35,68	-44,39	68,7	-9,24
Модель МОД								
$J$	2,72	4,51	-3,4	10,8	4,36	7,34	-7,87	-1,29
Модель МБД								
$J$	0,96	0,81	0,27	-2,12	0,77	1,34	-0,95	-0,14

Взагалі за результатами тестування методів  $Opt_{qk}$  можна зробити такі висновки:

- СМНК добре працює, якщо шуми  $N$  у  $X$  типу «білого шуму», модель наближена ( $\epsilon^* \neq 0$ ),  $X^*$  — гладка функція,  $N_i$  у  $N$  — взаємно не корельовані;
- МПК — на відміну від СМНК добре працює і з «кольоровим» шумом у  $X$ ;
- УМНК — на відміну від МНК перешкоди можуть бути взаємокорельовані;
- МБК — має робастність до збоїв у даних, але чутливий до неточності моделі (бажана малість  $\epsilon^*$ );
- МБД — стійкий до широкополосних перешкод, в іншому подібний до МБК;
- МОД — простіший за МНК, для малих  $\epsilon^*$  дає незміщені оцінки параметрів  $\beta$  за наявності шумів у  $X$ .

## 1.6. Енергетичний підхід до побудови параметричних моделей ЕТО

Для кількісної і якісної оцінки процесів енергоперетворення, що протікають в ЕТО, використовують параметричні математичні моделі, що припускають застосування систем диференціальних або диференційно-алгебраїчних рівнянь [11, 12, 13, 23, 24]. Найбільш загальним підходом у математичному моделюванні цього типу, який дозволяє детальніше враховувати процеси перетворення енергії в ЕТО, є *енергетичний формалізм Лагранжа* [18, 23, 24].

Відповідно до сучасних уявлень енергія  $W$  є мірою кількості руху матерії, незалежно від форми її прояву (механічною, електромагнітною, тепловою, хімічною, атомною). Енергія може акумулюватися на одних елементах ЕТО у вигляді потенційної або кінетичної складових (індуктивні і ємнісні елементи електричних кіл, пружні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв тощо). На інших елементах ЕТО енергія розсіюється (резистивні елементи електричних пристроїв, дисипативні елементи механічних пристроїв, теплопередавальні елементи теплових пристроїв).

Для системи, що складається з  $M$  елементів, припасена енергія визначається виразом:

$$W_K = \sum_{i=1}^N W_i^T + \sum_{j=1}^P W_j^U, \quad (1.24)$$

де  $W_i^T$ ,  $i=1, (1), N \leq M$  — величина кінетичної енергії, припасеної в  $N$  елементах ЕТО;  $W_j^U$ ,  $j=1, (1), P \leq M$  — величина потенціальної енергії, припасеної в  $P$  елементах ЕТО.

Якщо в системі присутні  $G$  елементів, кожний з яких розсіює енергію  $W_k^R$ , тоді розсіяна енергія визначається як сума:

$$W^R = \sum_{k=1}^G W_k^R. \quad (1.25)$$

Стан ЕТО визначається набором змінних, що характеризують процеси в підсистемах. Кожен з наборів є окремою підсистемою певної фізичної природи. Для представлення процесів перетворення енергії ЕТО в цілому, і для взаємозв'язку різномірних підсистем між собою, згідно з формалізмом Лагранжа, вводять:



– узагальнені координати  $q_i, i = 1 \dots S$  — усі  $S$  фізичних змінних, незалежно від їх фізичної природи, які однозначно визначають стан ЕТО в цілому (кут повороту, заряд, температура, ...);

– узагальнені сили  $f_i$ , — сили, що діють у напрямі узагальнених змінних  $q_i$ , і визначувані як  $f_i = \frac{dW_i}{dq_i}$ ;

– співвідношення

$$L = W^T - W^U, \quad (1.26)$$

$$H = W^T + W^U \quad (1.27)$$

називаються *силовими функціями*.

Ці функції відомі як функція Лагранжа  $L$  і функція Гамільтона  $H$ . Вони містять досить глибоку інформацію про процеси в підсистемах і їх взаємодію. З їх допомогою досягається універсальність моделювання різнорідних підсистем ЕТО з одночасним збігом опису електричних кіл рівняннями Кірхгофа, які моделюють в ЕТО основний елемент ЕТП — електротехнологічний перетворювач.

Рівняння Лагранжа другого роду для систем, у яких присутні елементи, що розсіюють енергію, і на які чинять зовнішні дії  $F(t)$  [18, 34, 38, 40]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_m} = F(t), \quad m = 1 \div M, \quad (1.28)$$

де  $D$  — функція розсіювання Релея;  $\dot{q}_m = \frac{dq_m}{dt}$  — швидкість змін  $m$ -ї узагальненої координати.

Рівняння (1.28) має ряд властивостей, які роблять їх вибір переважним порівняно з іншими підходами:

1) для основної частини ЕТО (джерела електричної енергії, електричного перетворювача, електротехнологічного перетворювача) рівняння Лагранжа другого роду (1.28) тотожні рівнянням, складеним за законами Кірхгофа, що дає можливість використання прийомів, методів і способів, добре розроблених у теорії електричних кіл [23];

2) рівняння Лагранжа, так само як і рівняння для енергій, зберігають незмінною свою форму для різнорідних підсистем, унаслідок

док чого відпадає необхідність використання відповідно різнорідних систем змінних параметрів і понять;

3) рівняння Лагранжа другого роду (1.28) виражають через силову функцію Лагранжа  $L$  (1.26), яка дозволяє визначити всі необхідні векторні величини (сили, моменти, швидкості, ...), будучи в той самий час скалярною функцією, чим досягається істотне спрощення процедури моделювання.

Для ілюстрації застосування енергетичного формалізму Лагранжа розглянемо найпростіший приклад.

**Приклад 1.3.** Електричне коло, що містить активний опір, індуктивний і ємнісний елементи (рис. 1.4). Дана система характеризується однією узагальненою координатою  $q_1$  — зарядом  $q$ . Швидкість зміни узагальненої координати  $q_1$  є струм, що протікає у колі  $\dot{q}_1 = i$ . Кінетичною енергією в даному випадку є енергія магнітного поля, запасена індуктивним елементом  $W_K^T = \frac{1}{2} Li^2$ . В якості потенційної енергії виступає енергія електричного поля, що запасасться конденсатором,  $W_K^U = \frac{q^2}{2C}$ . На активному опорі відбувається розсіювання частини енергії системи.

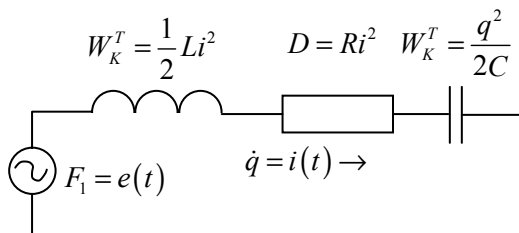


Рис. 1.4. Електричне коло, яке містить елементи, що запасують і розсіюють енергію

За законом Джоуля–Ленца величина розсіяної енергії  $D = R \cdot i^2$ . У системі (рис. 1.4) присутня одна узагальнена сила  $F_1(t)$ , яка дорівнює значенню ЕРС джерела  $e(t)$ . Значення активного опору, індуктивності і ємності, що називаються *параметрами системи*, вважаємо постійними, тоді силова функція Лагранжа (1.26) для даної системи матиме наступний вигляд:

$$L_K = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{q^2}{2C}. \quad (1.29)$$

Похідні, що входять в рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{\partial L_K}{\partial \dot{q}_1} = Li; \quad (1.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_K}{\partial \dot{q}_1} \right) = L \frac{di}{dt}; \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial L_K}{\partial q_1} = \frac{q}{C}; \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = Ri. \quad (1.33)$$

Підставляючи отримані вирази в (1.27), отримуємо:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e. \quad (1.34)$$

Співвідношення (1.34), складене за допомогою рівняння Лагранжа другого роду повністю співпадає з рівнянням для даного кола, складеним за II законом Кірхгофа.

Далі, рівняння (1.34) може бути використане для визначення поточних значень узагальненої координати за відомими значеннями параметрів системи і закону зміни узагальненої сили (*пряме завдання*), або для визначення невідомих значень параметрів за відомими законами зміни узагальненої координати і узагальненої сили (*завдання ідентифікації або зворотнє завдання*).

## 1.7. Системний підхід до процесу самостійного навчання на електронному тренажері

### 1.7.1. Вступ

Процес самостійного навчання займає важливе місце у системі електронних навчально-методичних ресурсів навчальної дисципліни (СЕНД) [27, 28, 29]. Одним із засобів самостійного навчання є електронний тренажер.

Щоб наблизитись до рівня прямого спілкування «вчитель — учень», електронний тренажер має забезпечувати оптимальний процес передачі інформації особі, що навчається.

Оптимальність процесу передачі інформації розуміється як мінімізація втрат інформації при передачі її від «вчителя» до того, хто навчається (учня, студента тощо), а також засвоєння цієї інформації.

Такий електронний тренажер, як складова частина СЕНД, а також викладач і особа, що навчається, створюють дворівневу автоматизовану систему керування процесом навчання.

Викладач (верхній рівень) визначає шлях (граф) проходження необхідних розділів відповідної дисципліни, вагу цих розділів у загальній оцінці рівня знань особи, що навчається, тобто задає головний критерій  $\Lambda$ .

Електронний тренажер і особа, що навчається, створюють нижній рівень системи, де особа, що навчається, є об'єктом керування, а тренажер — регулятором процесу навчання цього об'єкту. Викладач і особа, що навчається, можуть планувати загальний темп і термін вивчення відповідної дисципліни та бажаний рейтинг (бал) рівня засвоєння навчального матеріалу. Тренажер повинен забезпечити адаптивний (бажано оптимальний) до параметрів математичної моделі учня керуючий вплив.

Керуючими змінними такої системи є:

1. Темп подачі інформації (інтервал часу між заняттями);
2. Траєкторії руху вперед від розділу до розділу  $i$ , за необхідністю, повернення назад до вже пройдених модулів курсу на основі інформації з поточного тестування учня;
3. Об'єм мотиваційної інформації.

Повернення до попередніх модулів, як керівний вплив, необхідне за низького показника поточного контролю (тобто, розуміння) знань; мотивація — як вплив на якість засвоєння матеріалу.

Таким чином, при достатньому рівні формалізації і можливості контролю поточних параметрів моделі об'єкту навчання, процес навчання на електронному тренажері може (з відповідним ступенем наближення) бути представлений адаптивною системою автоматичного керування (САК) з *ідентифікатором* і синтезатором оптимального режиму.

### **1.7.2. Опис елементів системи автоматичного керування процесом навчання**

Навчальний матеріал відповідного предмету поділено на тематично цілісні *блоки*, приблизно однакові за обсягом — заняття терміном  $75 \pm 15$  хв.

Матеріал кожного  $n$ -го блоку ( $n = \overline{1, N}$ ) поділено на предметну інформаційну  $I(n)$  і мотиваційну  $M(n)$  складові. Передбачено декілька рівнів мотивації залежно від показника  $k(n)$  успішності учня. Для  $n$ -го блоку показник  $k(n)$  встановлюється за результатами поточного контролю окремих мікроблоків у межах  $n$ -го і остаточного — по всьому  $n$ -му блоку. Контроль по мікроблокам здійснюється при поданні матеріалу в режимі співбесіди: 30-ти секундна мовна та відповідна їй екранна інформація, запитання і 3 відповіді: поверхнева, нормальна, поглиблена. Учень, вибравши одну з них, набирає певну кількість балів, а тренажер, отримавши цю інформацію каналом зворотного зв'язку, коригує подальший шлях викладання матеріалу: перехід до наступного мікроблоку чи повернення до вже пройдених мікроблоків, логічно пов'язаних з поточним. На завершення процесу подачі інформаційної частини  $I(n)$   $n$ -го блоку здійснюється підсумковий контроль для  $n$ -го блоку за показником  $K(n)$  і, залежно від реального і бажаного рівня (заданого програмною траєкторією  $KV^*(n)$  накопичення рейтингу) приймається рішення за правилом:

– якщо  $K(n) \geq K_{\min}(n)$ , то, після необхідної паузи, перехід до  $n + 1$ -го блоку, якщо  $K(n) < K_{\min}(n)$ , то повтор без паузи  $n$ -го блоку зі збільшенням мотиваційної складової  $M(n)$ .

На початку кожного  $n$ -го заняття, учень проходить контроль залишкових знань по  $n - 1$ -му блоку-заняттю і отримує рейтинг  $KV(n)$ , залежно від рівня якого переходить до засвоєння  $n$ -го блоку з відповідним до  $KV(n)$  рівнем мотивації чи повертається на повторне вивчення  $n - 1$ -го блоку.

Сумарний рейтинг  $\sum_n KV(n)$  розглядається як функція часу  $t$  і коригується системою автоматичного керування зміною пауз  $T_n$  між блоками-заняттями. Послідовність дій на одному занятті представлено на рис. 1.5.

Вхід- ний конт- роль	Мікромодулі $n$ -го блоку $(n, i) \ i = \overline{1, m}$										Вихід- ний конт- роль	
$KV$ $(n - 1)$	$M(n, 1)$	$I(n, 1)$	$K(n, 1)$		$M(n, 1)$	$I(n, 1)$	$K(n, 1)$		$M(n, m)$	$I(n, m)$	$K(n, m)$	$KV(n)$

Рис. 1.5. Складові  $n$ -го заняття

Для успішного функціонування системи автоматичного керування слід побудувати структуру математичної моделі особи, що навчається як об'єкта керування та визначити поточні значення її параметрів:

$$K(n) = K_0 + K_M M(n) + K_r R(n), \quad (1.35)$$

$$KV(n) = K(n) \exp[-T_n / \tau_n] + KV_r R(n), \quad (1.36)$$

де  $K_0$ ,  $K_M$  і  $K_r$  — коефіцієнти лінійної стохастичної моделі залежності  $K(n)$  від рівня мотивації  $M(n)$  та випадковості  $R(n)$ ;  $R(n)$  — гаусів шум з одиничною дисперсією;  $\tau_n$  — стала часу експоненціального забування інформації  $n - 1$ -го заняття на  $n$ -му занятті:

$$\tau_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{\ln(K(n) / KV(n))}. \quad (1.37)$$

Експоненціальний процес накопичення знань у межах одного заняття наближено подано лінійною моделлю (1.35) унаслідок короткого часу одного заняття, а процес забування інформації в паузі  $T_n$  між заняттями взято експоненціальним (1.36).

*Електричний аналог* — заряд конденсатора ємності  $C$  RC — ланцюжка від послідовності імпульсів через діод і малий опір  $R_1$  і

розряд в паузах між імпульсами через великий опір  $R_2$ . Чим менше  $R_1$ , тим краще і більше сприймається інформація на уроці і, навпаки, чим більше  $R_2$ , тим більша стала забування в паузі між заняттями і тим краще запам'ятовується інформація.

Бажана оптимальна траєкторія  $\sum_{j=1}^n KV^*(t_j)$ ,  $n = \overline{1, n_k}$  накопичення знань у часі  $t_j$  задається на основі психологічних аспектів навчання викладачем або учнем, залежно від запланованого рівня знань і резервів часу. Задача тренажера, як системи автоматичного керування процесом, забезпечити близькість реальної траєкторії  $\sum_{j=1}^n KV(t_j)$  до бажаної  $\sum_{j=1}^n KV^*(t_j)$ , тобто мінімізувати деякий функціонал похибки  $\varepsilon(n)$ :

$$\varepsilon(n) = KV^*(n) - KV(n), \quad (1.38)$$

$n = \overline{1, n_k}$ , де  $n_k$  — номер кінцевого заняття. Цю задачу будемо вирішувати за допомогою дискретного пропорційно  $(k_p)$ -інтегрального  $(k_i)$  регулятора інтервалу  $\Delta T_n$  між  $n$ -ми і  $m - 1$ -им заняттями:

$$\Delta T_n = \frac{\Delta T_{\min} + \Delta T_{\max}}{2} \left[ \frac{1}{2} + K_p \frac{\varepsilon(n)}{\varepsilon_{\max}} + K_i \frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon(j)}{\varepsilon_{\max}} \right], \quad (1.39)$$

де  $\Delta T_{\min}, \Delta T_{\max}$  — обмеження на найменший і найбільший інтервал.

Процесу навчання на тренажері відповідає модель дискретної САК з частотно-імпульсною модуляцією, ідентифікацією та адаптацією до об'єкту керування (рис. 1.5).

Керування кількістю мотивації  $M(n)$  відбувається протягом  $n$ -го заняття залежно від якості  $K(n, i)$  засвоєння  $i$ -го мікроблоку  $n$ -го заняття. Збільшення  $M(n, i)$  призводить (за фіксованого часу  $T \pm \Delta T$   $n$ -го заняття) до зменшення кількості  $m$  мікроблоків у  $n$ -му блоці. Тоді регулятор  $\Delta T(\varepsilon, \tau, n)$  зменшує паузу між заняттями таким чином, щоб  $\sum KV(n)$  наближалась до  $\sum KV^*(n)$ .

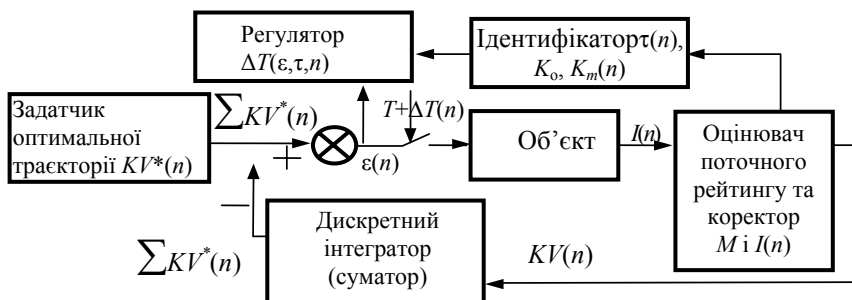


Рис. 1.5. Функціональна схема САК процесом керування

### 1.7.3. Числове моделювання процесу навчання на електронному тренажері

У середовищі MATLAB здійснено моделювання системи автоматичного керування навчальним процесом (рис. 1.5) у таких режимах: детермінований (ідеально зосереджений учень)  $K_r = KV_r = 0$ ,  $\Delta T(n) = \text{const}$ , тобто система (рис. 1.5) розімкнена, внаслідок чого траєкторія  $\sum KV(n)$  дещо попереджує оптимальну  $\sum KV^*(n)$  (рис. 1.6); той же учень, але САК замкнена і має  $(K_p)$  — регулятор (рис. 1.7); та сама система з пропорційно  $(K_p)$ -інтегральним  $(K_I)$  законом регулювання  $\Delta T(n)$  від  $\epsilon(n)$  (рис. 1.11). Як бачимо, у випадку (рис. 1.7) середньоквадратична похибка відслідковування бажаної траєкторії навчання мінімальна; за наявності не нульової випадкової складової  $KV_r = 0,2$  в моделі (1.36) (не ідеального учня) похибка для системи (рис. 1.9) і кількість занять дещо зросла (похибка з 1,62 до 3,67, кількість занять з 39 до 58). Таким чином стандартні пропорційні і пропорційно-інтегральні закони керування забезпечують відслідковування оптимальної траєкторії з похибкою 1,57 — 3,77 одиниць за сумарного максимального рейтингу в 68 одиниць, тобто, з похибкою 2 — 6 %.

З метою подальшого поліпшення процесу навчання реального учня ( $KV_r = 0,2$ ) розглянемо можливість побудови *оптимального адаптивного* (до учня) закону керування замість пропорційного та інтегрального.



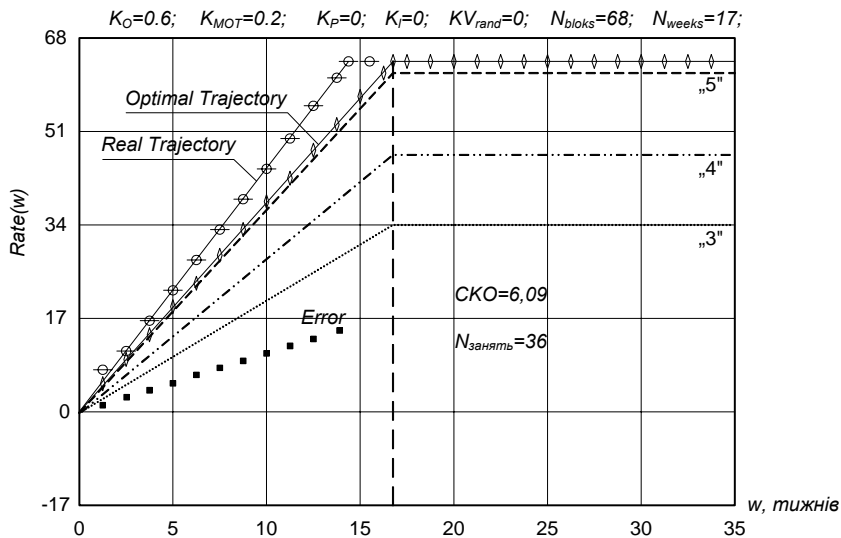


Рис. 1.6. Розімкнена система керування ідеальним учнем

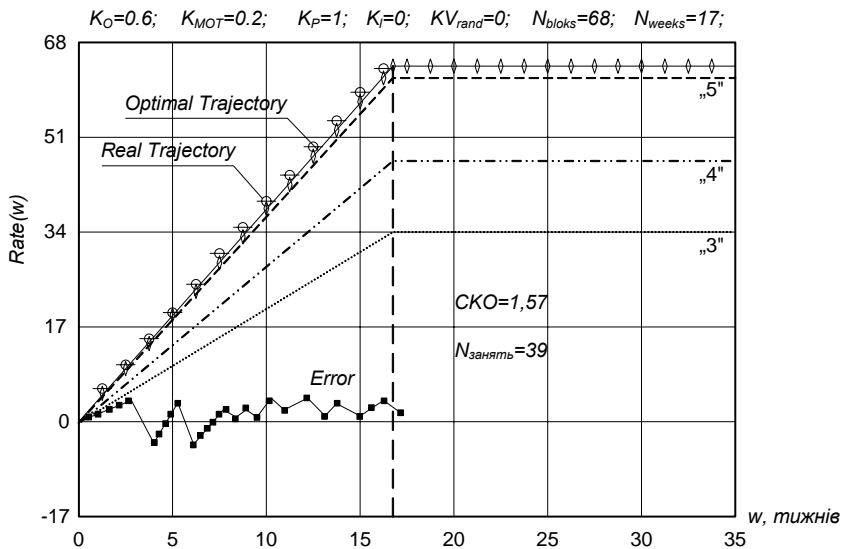


Рис. 1.7. Замкнена система автоматичного керування з пропорційним регулятором (ідеальний учень)

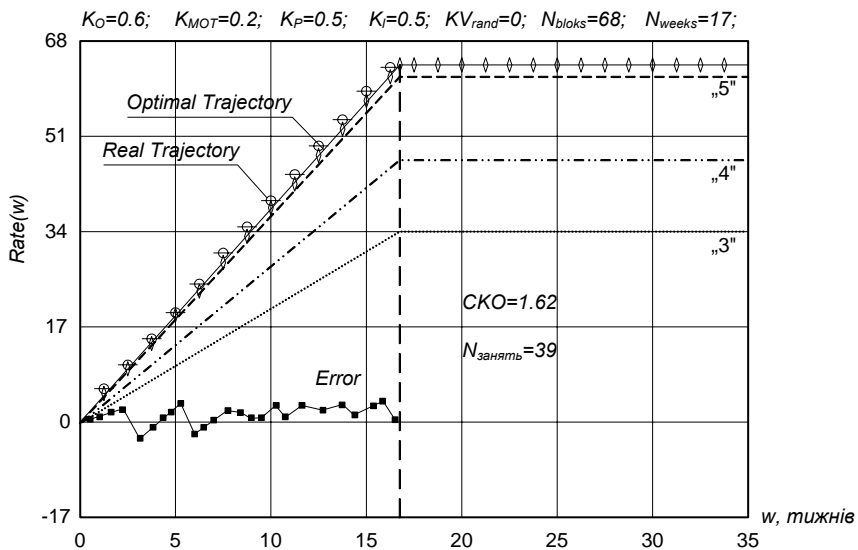


Рис. 1.8. Замкнена система автоматичного керування з пропорційно-інтегральним регулятором (ідеальний учень)

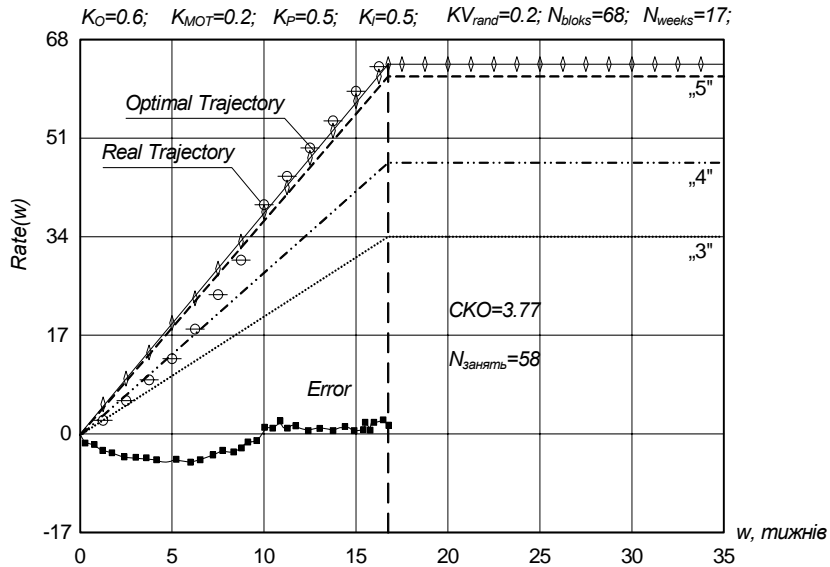


Рис. 1.9. Замкнена система адаптивного керування з пропорційно-інтегральним регулятором (реальний учень)

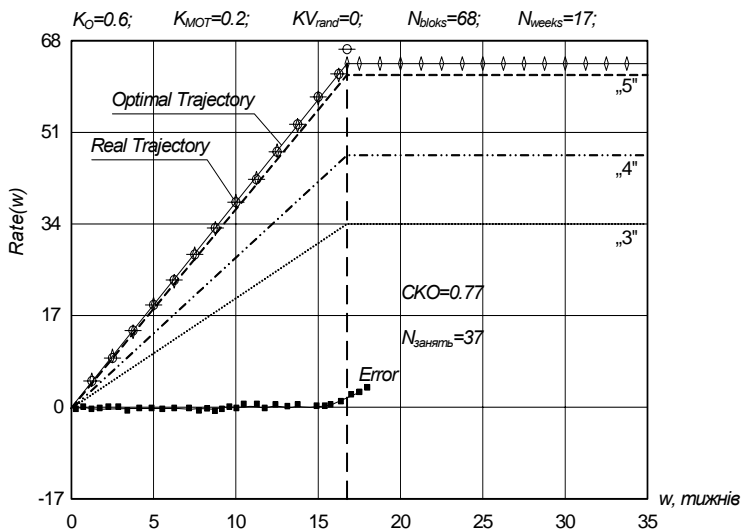


Рис. 1.10. Оптимальна система автоматичного керування процесом навчання (ідеальний учень)

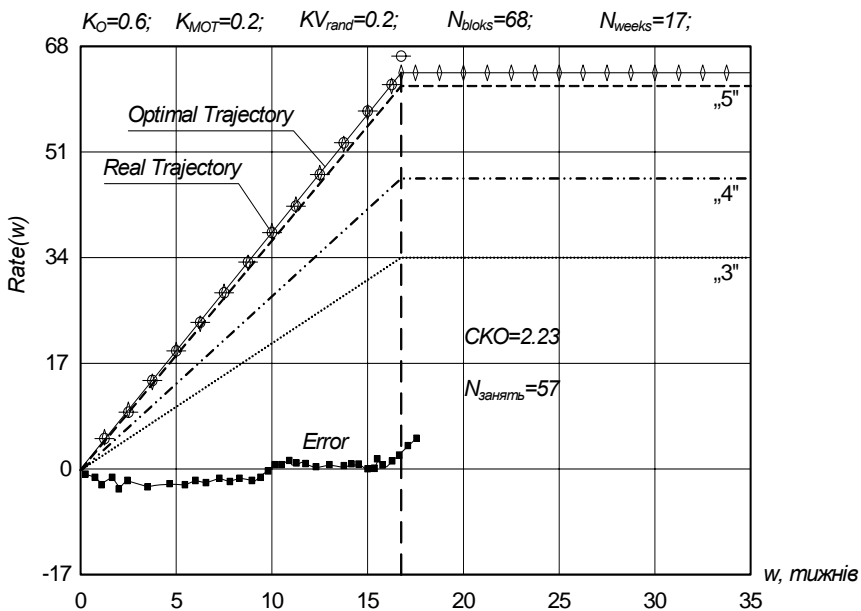


Рис. 1.11. Оптимальна система адаптивного керування процесом навчання (реальний учень)

Нехай на кінець  $n$ -го заняття (момент часу  $t_{n,2}$ ) поточний сумарний рейтинг учня, після виконання вхідного контролю залишкових знань по  $n-1$ -ому заняттю ( $KV(n-1)$ ) становить  $\sum_n KV(n)$ .

Сума оцінок поточного контролю по  $m$  мікроблокам  $n$ -го заняття дорівнює  $K(n)$ . Відоме також оптимальне (бажане) значення сумарного рейтингу учня на момент часу  $t_{n,1}$ , це  $\sum_n KV^*(n)$ .

З урахуванням того, що на момент часу початку  $n+1$ -го заняття рівень знань учня експоненціально зменшується (стала часу  $\tau_n$ ), то для моменту  $t_{n+1,1}$  прогнозований рейтинг учня визначиться наступним виразом:

$$\sum_n KV(n+1, t_{n+1,1}) = \sum_n KV(n, t_{n,2}) + K(n, t_{n,2}) \exp\left[\frac{t_{n+1,1} - t_{n,2}}{\tau_n}\right] \quad (1.40)$$

Прирівнявши вираз (1.40) до оптимального рейтингу  $\sum_n KV^*(n+1)$ , отримаємо вираз для визначення оптимального моменту  $t_{n+1,1}$  часу початку  $n+1$ -го заняття:

$$\sum_n KV(n, t_{n,2}) + K(n, t_{n,2}) \exp\left[\frac{t_{n+1,1} - t_{n,2}}{\tau_n}\right] = \sum_n KV^*(n+1). \quad (1.41)$$

Звідси оптимальне значення часу  $t_{n+1,1}$  початку  $n+1$ -го заняття дорівнюватиме:

$$t_{n+1,1} = t_{n,2} + \tau_n \ln \frac{\sum_n KV^*(n+1) - \sum_n KV(n, t_{n,2})}{K(n, t_{n,2})} \quad (1.42)$$

Як бачимо, на  $t_{n+1,1}$  впливають стала часу  $\tau_n$  та показники сумарного  $\sum_n KV(n, t_{n,2})$  та поточного  $K(n, t_{n,2})$  рейтингів. У правій частині виразу (1.42) відомі всі складові, окрім сталої часу  $\tau_n$ . Вона від заняття до заняття може змінюватись залежно від стану і ступеня мотивації учня. Тому для розв'язання рівняння (1.42) слід задати  $\tau_n$ . Найпростіше це зробити, прийнявши, що  $\tau_n = \tau_{n-1}$ , де

$\tau_{n-1}$  знаходять із попереднього заняття з виразу (1.40), якщо замість  $n + 1$  узяти  $n$ , а замість  $n$  узяти  $n - 1$ :

$$\sum_n KV(n, t_{n,1}) = \sum_n KV(n-1, t_{n-1,2}) + K(n-1, t_{n-1,2}) \exp \left[ \frac{t_{n,1} - t_{n-1,2}}{\tau_{n-1}} \right]; \quad (1.43)$$

звідси

$$\tau_{n-1} = \frac{(t_{n,1} - t_{n-1,2})}{\ln \frac{\sum_n KV(n, t_{n,1}) - \sum_n KV(n-1, t_{n-1,2})}{k(n-1, t_{n-1,2})}}. \quad (1.44)$$

Більш точно прогнозне значення  $\tau_n$  визначимо (якщо  $n > 3$ ) лінійною апроксимацією  $\tau(t)$  і прогнозом на інтервал  $t_{n+1,1} - t_{n,2}$ :

$$\tau_{n+1} = \tau_n + [t_{n+1,1} - t_{n,2}] \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{t_{n,1} - t_{n-1,2}}. \quad (1.45)$$

Комп'ютерне моделювання оптимальної САК, як засобу СЕНД, проведене за тих самих умов, що і САК з пропорційно-інтегральним законом керування:  $k_0 = 0,6$ ;  $K_M = 0,2$ ; число блоків  $N = 68$ , число тижнів — 17,  $K_r = 0,2$  (реальний учень). Результат моделювання оптимального режиму навчання наведено на рис. 1.10, 1.11. Порівнявши САК з регулятором (1.39) (рис. 1.10) і оптимальним регулятором (1.42) з додатковими обмеженнями на паузу  $T_n$  між заняттями ( $\max T_n > \min T_n$ ), унаслідок того, що  $t_{n+1,1}$  за виразом (1.42) коригується обмеженнями на довжину паузи, робимо такий висновок: практично за однакової кількості занять (58 і 57) у разі оптимального регулятора траєкторія накопичення рейтингу учня значно ближча до бажаної (середньоквадратична похибка — 2,23).

Таким чином, за відповідної формалізації процесу навчання на основі системного підходу з відповідним ступенем адекватності є можливість автоматизувати і оптимізувати цей процес.

Є думка, що якість навчання значно зросте і наблизиться до рівня безпосереднього спілкування вчитель–учень, якщо матеріал

подавати мікроблоками (30 секунд учень не відволікається) з запитаннями наприкінці кожного мікроблоку і трьома правильними відповідями різної глибини розуміння запитання.

Учень серед них вибирає (як кращу) зрозумілу для нього, а вчитель — тренажер змінює зміст наступного мікроблоку залежно від вибраної учнем відповіді. Такий діалог з початкової і поточною мотивацією та контролем наприкінці заняття може значно поліпшити засвоєння матеріалу.

Подібний електронний тренажер можна також використовувати для індивідуальної підготовки до лабораторних робіт і для автоматизації їх захисту, останнє суттєво полегшить роботу викладача і збільшить об'єктивність оцінки.

### Список літератури до розділу 1

1. Lambert J. Computational methods in ordinary differential equations / J. Lambert. — London–New-ork–Sydney–Toronto, J. Wiley&Sons, 1973. — 278 p.

2. Whittle P. Prediction and Regulation / P. Whittle. — Van Nostrand, Princeton, N. J., 1963. — 147 p.

3. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / под ред. Н. Д. Егунова. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. С. Баумана, 2000. — 748 с.

4. Бут Д. А. Основы электромеханики / Д. А. Бут. — М. : МАИ, 1996. — 467 с.

5. Бідюк П. І. Методи прогнозування / П. І. Бідюк, О. С. Меньяйленко, О. В. Половцев. — Луганськ : «Альма-матер», 2008. — 305 с.

6. Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики / К. Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц. — К. : Академперіодика, 2002. — 480 с.

7. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами / А. Г. Ивахненко. — К. : Техника, 1975. — 450 с.

8. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалби, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 400 с.

9. Кашин Г. М. Автоматическое управление продольным движением самолёта / Г. М. Кашин., И. М. Федоренко. — М. : Машиностроение, 1974. — 289 с.

10. Ковалёв В. З. Математическое моделирование электротехнических комплексов / В. З. Ковалев, Е. Г. Андреева; под общ. ред. Ю. З. Ковалёва. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 1999. — 172 с.
11. Ковалёв В. З. Моделирование электротехнических комплексов и систем как совокупности взаимодействующих подсистем различной физической природы: дис. докт. техн. наук / В. З. Ковалев. — Омск, 2000. — 312 с.
12. Ковалев В.З. Общая структура математической модели электротехнических комплексов / В. З. Ковалев // сб. тр. омских ученых: прил. к журн, «Ом. науч. вестник», нояб. 1998. — Омск, 1998. — С. 67–72.
13. Ковалев Ю. З. Построение иерархического набора математических моделей электромеханических преобразователей / Ю. З. Ковалев, В. З. Ковалев, В. В. Марголенко // Динамическое моделирование сложных систем: тез. докл. — М., 1987. — С. 163–164.
14. Костюк В. И. Асимптотическая инвариантность многократно адаптивных систем / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров // Теория инвариантности и её применение. — К. : Наук. думка, 1979. — С. 155–167.
15. Костюк В. И. Принцип многократной адаптивности / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров / Достижения и перспективы развития технической кибернетики. — К. : Изд-во РДИТП, 1975. — Т. 1. — С. 65–69 (тр. III Всесоюзной межуниверситетской НТК).
16. Костюк В. И., Сильвестров А. Н., Юдин А. Ю. Многократно адаптивная система идентификации МАСИ-1 и её применение / Вестник КПИ. Техническая кибернетика, 1980, № 4. — С. 41–48.
17. Кудрин Б. И. Электроснабжение промышленных предприятий: учебник для вузов / Б. И. Кудрин. — М. : Энергоатомиздат, 1995. — 416 с.
18. Ленк А. Электромеханические расчёты / А. Ленк. — М. : Энергоиздат, 1982. — 471 с.
19. Любич Ю. И. Общая теория релаксационных процессов / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский // Успехи математических наук, 1970. — № 1. — С. 57–112.
20. Маркова Е. В. Комбинированные планы в задачах многофакторного эксперимента / Е. В. Маркова, В. Н. Лысенков. — М. : Наука, 1979. — 348 с.

21. Математические основы теории автоматического управления / под ред. Б. К. Чемоданова. — М. : Высш. шк., 1977. — Т. 1. — 336 с.
22. Микляев М. С. Методика определения частотных характеристик машин переменного тока / М. С. Микляев // Электротехника. — № 6. — 1965. — С. 18–19.
23. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники: в 2 т. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. — Л. : Энергоатомиздат, 1981. — Т. 1–2.
24. Основы теории электрических аппаратов / под ред. Г. В. Буткевича. — М. : Высш. шк., 1970. — 600 с.
25. Политехнический словарь / под ред. А. Ю. Ишлинского. — М. : Сов. эн-цикл., 1989. — 500 с.
26. Райбман Н. С. Основы управления технологическими процессами / Н. С. Райбман, В. М. Чадаев. — М. : Наука, 1980. — 440 с.
27. Самсонов В. В., Поворознюк Н. И., Сильвестров А. М. Моделирование процесса самостоятельного обучения с электронным тренажером // Інформаційні технології в освіті. Вип. 1. Херсон: ХДУ, 2008. — С. 126–133.
28. Самсонов В. В., Сильвестров А. М., Костіков М. П. Алгоритм адаптивного навчання в системі електронних навчально-методичних ресурсів дисципліни // Тези доповідей Міжнар. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці». — Черкаси: ЧДТУ, 2012. — Т. 2. — С. 85–86.
29. Самсонов В. В., Сильвестров А. М., Скринник О. В. Системний підхід до розробки моделі керування процесом навчання // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — К. : НУХТ. — 2010, № 32 — С. 104–106.
30. Саридис Дж. Самоорганизующие стохастические системы управления / Дж. Саридис. — М. : Наука, 1980. — 400 с.
31. Себер Ж. Линейный регрессионный анализ / Ж. Себер. — М: Мир, 1980. — 456 с.
32. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.



33. Сильвестров А. Н. Многократно адаптивные системы идентификации / А. Н. Сильвестров, О. М. Папченко. — М., 1983. — 150 с.
34. Синицкий Л. А. Методы аналитической механики в теории электрических цепей / Л. А. Синицкий. — Львов : Вища шк. Изд-во при Львов, ун-те, 1978. — 138 с.
35. Солодовников В. В. Расчёт оптимальных систем автоматического управления при наличии помех / В. В. Солодовников, П. С. Матвеев. — М. : Машиностроение, 1973. — 239 с.
36. Солодовников А. И. Основы теории и методы спектральной обработки информации / А. И. Солодовников, А. М. Спиваковский. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1986. — 269 с.
37. Справочник по проектированию электроэнергетических систем / под ред. С. С. Рокотяна, И. М. Шапиро. — М. : Энергоатомиздат, 1985. — 352 с.
38. Уайт Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон. — М.-Л. : Энергия, 1964. — 344 с.
39. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. — М. : Физматгиз, 1963. — 552 с.
40. Фильц Р. В. Математические основы теории электромеханических преобразователей / Р. В. Фильц. — К. : Наук, думка, 1979. — 204 с.
41. Шидловский А. К. Кабели с полимерной изоляцией на сверхвысокие напряжения / А. К. Шидловский, А. А. Щерба, В. М. Золотарев, А. Д. Подольцев, И. Н. Кучерявая. — К. : Ин-т электродинамики НАН Украины, 2013. — 550 с.
42. Шин В. И. Субоптимальный алгоритм оценки состояния и параметров многомерных непрерывных нелинейных систем / В. И. Шин // Автоматика и телемеханика, 1984. — № 1. — С. 101–106.
43. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйхгофф. — М. : Мир, 1975. — 690 с.
44. Электротехнический справочник; в 3 т. Т. 3, кн. 2: Использование электрической энергии / под общ. ред. И. Н. Орлова. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — 614 с.



Для однозначного визначення параметрів  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , необхідно, щоб число  $n$  даних задовольняло умові

$$n \geq m + 1, \quad (2.3)$$

де  $m + 1$  — число параметрів, якими визначається теоретична множинна лінійна регресія (2.2), значення яких оцінюються на основі обробки вибірки з  $n$  даних експерименту на ЕТО.

Векторно-матрична форма теоретичної моделі (2.2):

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ & & & \ddots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Похибка  $\varepsilon$  є випадковим вектором, компоненти  $\varepsilon_i$  якого характеризують відхилення, викликані випадковими збуреннями, які не враховано в структурі моделі. При оцінюванні параметрів теоретичної лінійної множинної регресії для забезпечення статистичної надійності число  $n$  спостережень має суттєво перевищувати кількість  $m + 1$  оцінювальних параметрів. Емпірична модель є статистичним аналогом теоретичної. За її допомогою визначаються оцінки параметрів моделі (2.2) шляхом статистичної обробки вибірки даних. Емпірична модель  $Y$  у векторно-матричній формі

$$Y = X\beta^* + e, \quad (2.5)$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ & & & \ddots & \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \beta^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

де  $\beta^*$  — статистична оцінка теоретичного вектора  $\beta$  лінійної множинної регресії (2.4);  $e$  — статистична оцінка випадкового вектора похибок  $\varepsilon$  цієї ж моделі.

Якщо компоненти вектора  $\varepsilon$  — це невідомі випадкові величини, то компоненти  $e_i$  вектора  $e$  можуть бути обчислені за даними вибірки.

Для визначення вектора  $\beta^*$  використовується метод найменших квадратів. Для оптимальності МНК мають бути виконані умови Гаусса–Маркова:

$$1) M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$2) \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \sigma_\varepsilon^2, & i = j, \end{cases}$$

тобто між випадковими відхиленнями  $\varepsilon_i$  і  $\varepsilon_j$  повинен бути відсутній кореляційний зв'язок, та дисперсія  $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \text{const} = \sigma^2$ ;

3) між регресорами моделі і випадковим вектором  $\varepsilon$  теж має бути відсутній кореляційний зв'язок, тобто  $\text{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0, i = \overline{1, n}$ ;

4) регресори моделі повинні бути точними;

5) модель має бути лінійною відносно своїх параметрів;

6) між векторами  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ,

$$\text{де } X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \quad X_m = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix}, \quad \text{має бути відсутня лі-}$$

нійна залежність, щоб визначник матриці  $X^T X$  був більше нуля;

7) випадковий вектор  $\varepsilon$  має багатовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей:

$$\varepsilon \sim N(0; \sigma \cdot I_n);$$

кожний компонент  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon$  також буде мати нормальний закон розподілу

$$\varepsilon_i \sim N(0; \sigma), \quad i = \overline{1, n};$$

8) ранг  $r(X)$  матриці  $X$  повинен бути не менше  $(m+1)$ .

Виконання цих умов дає право на використання звичайного МНК для визначення статистично-оптимальних оцінок  $\beta^*$  параметрів  $\beta$  теоретичної лінійної множинної регресії, як моделі статистики ЕТО, перевірки статистичних гіпотез та побудови інтервальних статистичних оцінок.

### **2.1.2. Оцінювання вектора $\beta$ за методом найменших квадратів (МНК)**

Із виразу (2.5) вектор похибок  $e$  буде дорівнювати:

$$e = y - X\beta^*. \quad (2.7)$$

Для визначення компонент вектора  $\beta^*$  — статистичних оцінок компонент вектора  $\beta$  використовується МНК. Він полягає в мінімізації по  $\beta^*$  суми квадратів похибок  $e^T e$ :

$$\begin{aligned} e^T e &= (y - X\beta^*)^T (y - X\beta^*) = \left( y^T - (\beta^*)^T X^T \right) (y - X\beta^*) = \\ &= y^T y - y^T X\beta^* - (\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^* = \\ &= y^T y - 2(\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^*, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де літерою  $(T)$  позначено транспонування вектора чи матриці.

Необхідна умова мінімуму виразу (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e^T e)}{\partial\beta^*} &= \frac{\partial}{\partial\beta^*} (y^T y - 2(\beta^*)^T X^T y + (\beta^*)^T X^T X\beta^*) = \\ &= -2X^T y + X^T X\beta^* + ((\beta^*)^T X^T X)^T = -2X^T y + \\ &+ X^T X\beta^* + X^T X\beta^* = -2X^T y + 2X^T X\beta^* = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Звідси отримаємо оцінку  $\beta^*$  вектора  $\beta$ :

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y, \quad (2.10)$$

яка складається з точного значення  $\beta$  і випадкової складової:

$$\beta^* = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon. \quad (2.11)$$

### 2.1.3. Числові характеристики МНК-оцінки $\beta^*$

Оскільки  $\beta^*$  є випадковим вектором, то його компоненти  $\beta_i^*$  будуть випадковими величинами. Тому виникає потреба у визначенні їхніх числових характеристик.

Враховуючи (2.11) отримаємо математичне очікування  $M(\beta^*)$  МНК-оцінки  $\beta^*$ :

$$\begin{aligned} M(\beta^*) &= M(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon) = M(\beta) + \\ &+ M((X^T X)^{-1} X^T \epsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T M(\epsilon) = \beta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оскільки  $M(\epsilon) = 0$ , то  $M(\beta^*) = \beta$ . Таким чином емпіричний вектор  $\beta^*$  є точковою незміщеною статистичною оцінкою для теоретичного вектора  $\beta$  параметрів.

Для отримання дисперсій компонентів  $\beta_i^*$  емпіричного вектора  $\beta^*$ , як випадкових величин, визначимо коваріаційний момент:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) &= M(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)^T = \\ &= M(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon - \beta)(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \epsilon - \beta)^T = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \epsilon ((X^T X)^{-1} X^T \epsilon)^T] = \\ &= M[(X^T X)^{-1} X^T \epsilon \epsilon^T X ((X^T X)^{-1})^T] = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \right\} X (X^T X)^{-1} = \\ &= (X^T X)^{-1} X^T M \begin{pmatrix} \epsilon_1^2 & \epsilon_1 \epsilon_2 & \cdots & \cdots & \epsilon_1 \epsilon_n \\ \epsilon_2 \epsilon_1 & \epsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \epsilon_2 \epsilon_n \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \epsilon_n \epsilon_1 & \epsilon_n \epsilon_2 & \cdots & \cdots & \epsilon_n^2 \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^T X)^{-1} X^T \begin{pmatrix} M(\epsilon_1^2) & M(\epsilon_1 \epsilon_2) & \dots & M(\epsilon_1 \epsilon_n) \\ M(\epsilon_2 \epsilon_1) & M(\epsilon_2^2) & \dots & M(\epsilon_2 \epsilon_n) \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ M(\epsilon_n \epsilon_1) & M(\epsilon_n \epsilon_2) & \dots & M(\epsilon_n^2) \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_\epsilon^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_\epsilon^2 \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \sigma_\epsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X (X^T X)^{-1} = \\
&= (X^T X)^{-1} X^T \sigma_\epsilon^2 I_n X (X^T X)^{-1} = \\
&= \sigma_\epsilon^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} = \sigma_\epsilon^2 (X^T X)^{-1},
\end{aligned}$$

оскільки  $\sigma_\epsilon^2 = \text{const}$  і  $M(\epsilon_i \epsilon_j)$  для  $i \neq j$  дорівнює нулю.

Таким чином коваріаційна матриця оцінок

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)') = \sigma_\epsilon^2 (X^T X)^{-1}. \quad (2.13)$$

Позначимо  $c_{ij} (i, j = \overline{1, n})$  елементи оберненої матриці  $C = (X^T X)^{-1}$ . Тоді

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) = \sigma_\epsilon^2 (X^T X)^{-1} = \sigma_\epsilon^2 C, \quad (2.14)$$

або

$$\sigma_{\varepsilon}^2 C = \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}.$$

Далі, враховуючи що

$$\beta \beta^T = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix} (\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*),$$

одержимо коваріаційну матрицю оцінок  $\beta^*$ :

$$\begin{aligned} & \text{cov}(\beta^* (\beta^*)) = \\ & = \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_m^* \beta_2^*) \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Оскільки  $\text{cov}(\beta_i^*)^2 = D(\beta_i^*) = \sigma_{\beta_i}^2$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , то вираз (2.14) набуває такого вигляду:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 C = \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_1^* \beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 & \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) & \cdots & \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) \\ \text{cov}(\beta_2^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_2^* \beta_1^*) & \sigma_{\beta_2}^2 & \cdots & \text{cov}(\beta_2^* \beta_m^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(\beta_m^* \beta_0^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_1^*) & \text{cov}(\beta_m^* \beta_2^*) & \cdots & \sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix} =$$



$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2,m+1} \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & \vdots & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

де

$$\sigma_{\beta_0^*}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{11}, \quad \sigma_{\beta_1^*}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{22}, \quad \sigma_{\beta_2^*}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{33}, \dots, \sigma_{\beta_m^*}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 c_{m+1,m+1}.$$

Отже дисперсії оцінок  $\beta_i^*$  будуть дорівнювати добуткам діагональних елементів  $c_{ij}$  матриці  $C$ , помножених на  $\sigma_{\varepsilon}^2$ , де  $C = (X^T X)^{-1}$ .

#### 2.1.4. Числові характеристики рівняння регресії

Розглянемо рівняння множинної лінійної регресії з параметрами  $\beta_i^* (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ , визначеними за даними вибірки:

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \cdots + \beta_m^* x_m, \quad (2.17)$$

де  $y_i^*$  — одне із можливих значень для заданого вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Оскільки емпіричні коефіцієнти функції (2.17) випадкові величини, то і емпірична функція  $y_i^*$  буде випадковою.

Постає питання про визначення її характеристик:

1. Математичне очікування:

$$\begin{aligned} M(y_i^*) &= M(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \cdots + \beta_m^* x_m) = \\ &= M(\beta_0^*) + x_1 M(\beta_1^*) + x_2 M(\beta_2^*) + \cdots + \\ &+ x_m M(\beta_m^*) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тобто  $y^* = x\beta^*$  є незмінною оцінкою теоретичної функції  $y = x\beta$ . Із рівняння (2.18) випливає, що для емпіричної функції регресії  $y^* = X\beta^*$  буде виконуватися рівність

$$M(y^*) = M(X\beta_0^*) = XM(\beta^*) = X\beta. \quad (2.19)$$

2. Дисперсія:

$$\begin{aligned} D(y^*) &= D(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) = \\ &= D(\beta_0^*) + x_1^2 D(\beta_1^*) + x_2^2 D(\beta_2^*) + \dots + x_m^2 D(\beta_m^*) + \\ &+ 2x_1 \text{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) + 2x_2 \text{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) + \dots + 2x_m \text{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) + \\ &+ 2x_1 x_2 \text{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) + \dots + 2x_1 x_m \text{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) + \dots + \\ &+ 2x_{m-1} x_m \text{cov}(\beta_{m-1}^* \beta_m^*) = x^T \text{cov}((\beta^*)^T \beta^*) x. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Векторно-матричний вигляд рівняння (2.20):

$$D(y_i^*) = \sigma_\varepsilon^2 x^T (X^T X)^{-1} x.$$

3. Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_{y_i^*} = \sigma_\varepsilon \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x}. \quad (2.21)$$

4. Коефіцієнт детермінації для множинної лінійної регресії — це неспадна функція від числа  $m$  регресорів  $x$ :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (2.22)$$

Кожна нова змінна надає моделі додаткову інформацію і область невизначеності при цьому зменшується.

При обчисленні  $R^2$  для одержання її незміщених статистичних оцінок здійснюють поправку в чисельнику і знаменнику (2.22) на число ступенів вільності. Такий коефіцієнт називають скоригованим [1, 2, 6]:

$$R_{\text{ск}}^2 = 1 - \frac{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}}{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1 - \frac{(n-1) \sum e_i^2}{(n-m-1) \sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (2.23)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\sum y_i^2}{(y_i - \bar{y})^2} = 1 - R^2, \quad (2.24)$$

остаточно одержимо

$$R_{\text{ск}}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-m-1}. \quad (2.25)$$

### 5. Довірчі інтервали:

Для перевірки значущості статистичних оцінок  $\beta_i^*$  і щоб знайти для них, а також для множинної лінійної регресії, довірчі інтервали, необхідно визначити їхні закони розподілу, як випадкових величин.

Оскільки  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$  випадковий вектор, який має  $n$ -вимірний нормальний закон розподілу  $N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n)$ , то із виразу (2.11) випливає, що

$$\beta_i^* \sim N\left(\beta, \sigma_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1}\right). \quad (2.26)$$

Тоді компоненти  $\beta_i^*$  вектора  $\beta^*$  будуть мати розподіли

$$\beta_i^* \sim N\left(\beta_i, \sigma_\varepsilon^2 c_{ii}\right). \quad (2.27)$$

Розподіл випадкової величини:

$$\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sigma_\varepsilon \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0, 1). \quad (2.28)$$

Розподіл випадкової величини:

$$\begin{aligned} & (\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m) \sim \\ & \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m, \sigma_\varepsilon^2 x^T (X^T X)^{-1} x\right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \dots + \beta_m^* x_m, \quad (2.29)$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \quad (2.30)$$

Тоді випадкова величина  $\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}}$  теж буде мати нормований

нормальний закон (2.28) розподілу ймовірностей:

$$\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}} \sim N(0;1). \quad (2.31)$$

Для визначення законів розподілу ймовірностей оцінок дисперсій, як випадкових величин  $S_\varepsilon^2$  і  $S_\varepsilon$ , слід дослідити випадковий вектор залишків  $\varepsilon_i$ . Відповідно до передумов МНК компоненти  $\varepsilon_i$  вектора  $\varepsilon_i$  мають нормальний закон розподілу із параметрами  $M(\varepsilon_i) = 0$ ,  $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma)$ .

Тоді

$$\varepsilon T \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = (n-m-1) \sum \varepsilon_i^2. \quad (2.32)$$

Враховуючи що  $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma_\varepsilon)$ , випадкова величина буде мати  $\chi^2$  розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності

$$\frac{\varepsilon T \varepsilon}{(n-m-1) \sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-m-1). \quad (2.33)$$

Якщо

$$e = TY = T(X\beta + \varepsilon) = TX\beta + T\varepsilon = T\varepsilon \text{ і } TX = 0, \text{ а } T^T = T, \quad (2.34)$$

то

$$e^T = (Ty)^T = y^T T^T = (X\beta + \varepsilon)^T T^T = \beta^T X^T T^T + \varepsilon^T T^T = \varepsilon^T T^T,$$

$$\text{і } \bar{e} \bar{e} = \bar{\varepsilon}' T T \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}' T \bar{\varepsilon},$$

оскільки  $T^T T = T$ . Тоді випадкова величина (2.33) має  $\chi^2$  розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

$$\frac{e e^T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1).$$

Отже, оцінка дисперсії похибки є дорівнює

$$S_{\varepsilon}^2 \sim \chi^2(n-m-1), \quad (2.35)$$

і її середньоквадратичне значення

$$S_{\varepsilon} \sim \chi(n-m-1), \quad (2.36)$$

відповідно мають розподіл  $\chi^2$  і розподіл  $\chi$  із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

Враховуючи те, що  $\beta^*$  і  $e$  статистично незалежні, то випадкова величина  $t$  буде мати розподіл Стюдента із  $k = n - m - 1$  степенями вільності:

$$t = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \sim t(n-m-1). \quad (2.37)$$

Аналогічно, для функції регресії маємо випадкову величину

$$\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}} \sim t(n-m-1), \quad (2.38)$$

яка має  $t$ -розподіл із  $k = n - m - 1$  степенями вільності, де

$$S_{y_i^*} = S_{\varepsilon} \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x}. \quad (2.39)$$

Враховуючи те, що

$$\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m), \quad (2.40)$$

а

$$\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2(n-m-1)} \sim \chi^2(n-m-1),$$

то відношення

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^m (\beta_i^* - \beta_i)^2}{\sum_{i=1}^m e_i^2}}{n-m-1} \sim F(k_1 = m, k_2 = n-m-1) \quad (2.41)$$

буде мати  $F$ -розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n-m-1$  степенями вільності.

### 2.1.5. Довірчі інтервали моделі статистики ЕТО та її параметрів $\beta_i$

Для побудови довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_i$  використовують співвідношення (2.37). Із надійністю  $\gamma$  цей інтервал визначається за умови, що

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma. \quad (2.42)$$

Враховуючи що  $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m e_i^2}{n-m-1} c_{ii}} = S_{\beta_i^*}$  є незміщеною оцінкою середньоквадратичного відхилення для  $\beta_i^*$ , вираз (2.42) набуде такого вигляду:

$$P \left( \left| \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}} \right| < t(\gamma, k) \right) = \gamma$$

або

$$P(\beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*}) = \gamma. \quad (2.43)$$

Тобто, із заданою надійністю  $\gamma$  параметр  $\beta_i$  буде міститися в проміжку

$$\beta_i^* - t(\gamma, k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma, k) S_{\beta_i^*}, \quad (2.44)$$

де  $t(\gamma, k)$  знаходять за таблицею (дод. 1) за заданою надійністю  $\gamma$  і числом степенів вільності  $k = n - m - 1$ .

Аналогічно для побудови довірчого інтервалу для теоретичної множинної лінійної функції регресії із заданою надійністю  $\gamma$  використовується рівність

$$P\left(\left|\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}}\right| \sim t(\gamma, k)\right) = \gamma, \quad (2.45)$$

або

$$y_i^* - t(\gamma, k)S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)S_{y_i^*}, \quad (2.46)$$

де  $y_i^*$ ,  $S_{y_i^*}$  визначають за формулами (2.17), (2.37) для фіксованих значень вектора  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Якщо до значень  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m$  додати можливі відхилення залежної змінної  $Y$  від функції регресії, то до дисперсії  $D(y_i^*)$  необхідно додати дисперсії випадкової величини  $\varepsilon_i$ , яка дорівнює  $\sigma_\varepsilon^2$ . Однак, враховуючи, що  $\sigma_\varepsilon^2$  невідома величина, використовуємо її точкову незміщену статичну оцінку  $S_\varepsilon^2$ :

$$(S_{y_i^*}^*)^2 = S_\varepsilon^2 \left( I + x^T (X^T X)^{-1} x \right). \quad (2.47)$$

Тоді довірчий інтервал для  $y_i$  буде дорівнювати:

$$y_i^* - t(\gamma, k)S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma, k)S_{y_i^*}. \quad (2.48)$$

### **2.1.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії**

Статистична значущість коефіцієнтів теоретичної множинної лінійної регресії із  $m$  регресорами здійснюється на основі  $t$ -статистики

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.49)$$

яка має розподіл Стюдента із  $k = n - m - 1$  степенями вільності.

Для заданого рівняння значущості  $\alpha$  здійснюється перевірка правдивості статистичної гіпотези  $H_0: \beta_i = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_\alpha: \beta_i \neq 0$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови двобічної критичної області. Враховуючи те, що  $t$ -розподіл визначається парною диференційною функцією, то за заданим значенням  $\alpha$  і числом степенів вільності  $k = n - m - 1$  знаходять критичне значення  $t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$  за таблицею (дод. 2).

Враховуючи те, що  $\left|t'_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)\right| = t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$ , тобто критичні точки симетрично розташовані відносно нуля, область прийняття гіпотези  $H_0$  дорівнюватиме

$$\left[ t'_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right].$$

Спостережуване значення статистичного критерію обчислюється за формулою

$$t_{\beta_i}^* = \frac{\beta_i^*}{S_{\beta_i^*}}. \quad (2.50)$$

Якщо  $|t_{\beta_i}^*| \in \left[ t'_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right]$ , то коефіцієнти  $\beta_i$  вважають статистично незначущими, тобто вони статистично близькі до нуля. Це буде означати, що змінна  $X_i$  лінійно не пов'язана із залежною змінною  $Y$  і її присутність у моделі можна вважати зайвою із статистичного погляду.

За виявлення такої ситуації рекомендується вивести  $X_i$  із моделі, що не викличе зниження її якості, але надасть більш чіткої конкретності. Якщо

$$|t_{\beta_i}^*| \notin \left[ t'_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right), t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right) \right],$$

то коефіцієнти  $\beta_i$  вважаються статистично значущими, а вхідна змінна  $X_i$  має вплив на вихідну змінну  $Y$  об'єкта.



### 2.1.7. Перевірка загальної якості моделі ЕТО

Після оцінювання індивідуальної статистичної значущості кожного із коефіцієнтів  $\beta_i$  здійснюється сукупна перевірка коефіцієнтів, тобто перевіряється на правдивість статистична гіпотеза:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$$

для заданого рівня довіри  $\alpha$ .

Якщо  $H_0$  не відхиляється, то можна зробити висновок, що сукупний вплив усіх  $m$  змінних  $x_i$  на залежну змінну  $Y$  можна вважати статистично не суттєвим, а загальну якість рівняння регресії низькою.

Перевірку цієї гіпотези можна здійснити на основі дисперсійного аналізу, де порівнюються пояснювальна  $\left( \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} \right)$  та залишкова дисперсії.

У цьому разі нульова гіпотеза набуває такого формулювання:

$$H_0 : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} = \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}, \quad (2.51)$$

за альтернативної гіпотези

$$H_\alpha : \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m} > \frac{\sum e_i^2}{n - m - 1}. \quad (2.52)$$

Для перевірки правдивості  $H_0$  беруть статистичний критерій

$$F = \frac{\frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum (y_i - y_i^*)^2}{n - m - 1}} = \frac{(n - m - 1) \sum (y_i^* - \bar{y})^2}{m \sum (y_i - y_i^*)^2}, \quad (2.53)$$

який має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  степенями вільності і який визначений на інтервалі  $[0, \infty)$ .

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови правобічної критичної області. Критична точка для неї

визначається за заданим  $\alpha$  і числом степенів вільності  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  за таблицею  $F$ -критерію (дод. 3).

Спостережуване значення критерію  $F_{\text{сп}}^*$  обчислюється за формулою (2.53). Якщо  $F_{\text{сп}}^* > [F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)]$ , то  $H_0$  відхиляється на користь  $H_\alpha$ . Це означає, що пояснювальна дисперсія є суттєво більшою залишкової, а це говорить про те, що рівняння регресії якісно моделює об'єкт ідентифікації.

За умови  $F_{\text{сп}}^* \in [0, F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2)]$  немає підстави для відхилення  $H_0$ . А це означає, що пояснювальна дисперсія буде спільновимірною із дисперсією, викликану впливом випадкових факторів. Це дає підстави стверджувати, що сукупний вплив пояснювальних змінних моделі на залежну змінну  $Y$  несуттєвий, а тому якість моделі в цьому випадку буде низькою.

На практиці частіше замість вище розглянутої гіпотези перевіряється на правдивість тісно з нею пов'язана гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}, \quad (2.54)$$

де  $\left( \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \right)$  визначає частку розсіювання залежної змінної  $Y$  відносно емпіричної регресії.

Отже, необхідно перевірити правдивість  $H_0: R^2 = 0$  при альтернативній  $H_\alpha: R^2 > 0$ . За статистичний критерій обирають випадкову величину

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (2.55)$$

яка має розподіл Фішера із  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$  степенями вільності

$$F = \frac{\sum (y_i^* - \bar{y})^2}{\sum (y_i - y_i^*)^2} \cdot \frac{(n - m - 1)}{m}. \quad (2.56)$$

Критерій (2.55) отримано із  $F$ -статистики, якщо чисельник і знаменник поділити на  $\sum (y_i - \bar{y})^2$ .

Із виразу (2.55) випливає, що  $F = 0$  якщо  $R^2 = 0$ .

Отже, для перевірки статистичної гіпотези  $H_0: F = 0 (R^2 = 0)$  для заданого рівня значущості  $\alpha$  за таблицею (дод. 3) знаходять  $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ , який буде визначати критичну область  $F_{кр}((\alpha; k_1; k_2); \infty)$ . Обчисливши спостережуване значення критерію, за формулою (2.55) визначаємо наступне:

1) якщо  $F_{сп}^* > F_{кр}$ , то  $H_0$  відхиляється, а це рівнозначно твердженню, що  $R^2 > 0$ , тобто  $R^2$  є статистично значущим. У цьому разі можна зробити висновок, що рівняння регресії достатньо якісно моделює динаміку зміни залежної змінної  $Y$ ;

2) якщо  $F_{сп}^* < F_{кр}$  немає підстав для відхилення  $H_0$ ,  $R^2 = 0$ , а це інформує про те, що сукупний вплив регресорів моделі несуттєвий, а отже, якість моделі в цьому випадку низька.

### **2.1.8. Визначення моделі статистики генератора постійного струму**

За даними пасивного експерименту (табл. 2.1) необхідно знайти залежність не точно вимірюваної напруги генератора  $U$  від струмів якоря  $X_1$  та збудження  $X_2$ .

Таблиця 2.1

**Залежність  $U_y$  від  $I_{x1}$  і  $I_{x2}$**

№ з/п	Напруга у вольтах, $U_y$	Струм якоря $X_1$ , в амперах $I_{x1}$	Струм збудження $X_2$ , в амперах $I_{x2}$
1	111	6	3
2	103,2	10	1,3
3	108,7	10	1,8
4	101,6	16	1,8
5	117	2	2,4
6	118,9	4	4,0
7	115,8	3	2,0
8	118	6	3,0
9	119	3	4,0
10	106	6	1,6

№ з/п	Напруга у вольтах, $U_y$	Струм якоря $X_1$ , в амперах $I_y$	Струм збудження $X_2$ , в амперах $I_z$
11	113	6	2,6
12	123	5	2,1
13	114	3	2,0
14	111	3	1,5
15	109,5	8	2,6
16	128	3	2,2
17	106	8	1,8
18	105,8	9	1,6
19	102,8	11	1,6
20	126	1	2,2
21	110,5	6	2,0
22	116,9	7	2,3
23	103,4	9	1,5
24	114	1	1,4
25	123	1	1,8
Середнє	113,024	5,88	2,16

Припустимо лінійну залежність напруги  $Y$  від струмів  $X_1$  і  $X_2$ :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon.$$

Необхідно:

- 1) обчислити статистичну оцінку вектора  $\beta$ ;
- 2) проаналізувати ступінь адекватності побудованої моделі вибірковим даним;
- 3) виконати дисперсійний аналіз моделі та обчислити коефіцієнт множинної детермінації  $R^2$ ;
- 4) перевірити статистичну значущість коефіцієнта детермінації на основі критерію Фішера;
- 5) визначити оцінки дисперсій  $S_{\beta_0}^2, S_{\beta_1}^2, S_{\beta_2}^2$  та середньоквадратичні відхилення  $S_{\beta_0}^*, S_{\beta_1}^*, S_{\beta_2}^*$  для статистичних оцінок  $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$ ;
- 6) для заданої надійності  $\gamma = 0,95$  побудувати довірчі інтервали параметрів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ;

*Розв'язання:*

1. Обчислення статистичної оцінки для вектора  $\beta$ .

Емпіричний вектор  $\beta^*$  визначимо за формулою (2.10):

$$\beta^* = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

де

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,67227 & -0,02897 & -0,21347 \\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441 \\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667 \end{pmatrix},$$

$$X^T y = \begin{pmatrix} 325,6 \\ 1400,4 \\ 762,95 \end{pmatrix}.$$

Статистичні точкові МНК-оцінки параметрів моделі:

$$\beta_0^* = 115,4; \quad \beta_1^* = -1,44; \quad \beta_2^* = 2,79.$$

Залежність напруги від струмів якоря і збудження:

$$y_i^* = 115,4 - 1,44x_{i1} + 2,79x_{i2}, \quad i = \overline{1, 25}.$$

2. *Аналіз ступеня адекватності побудованої моделі вибірко-вим даним*

Обчислимо вектор  $y_i^*$  за формулою

$$y_i^* = X\beta^*.$$

Правильність виконаних розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення  $\bar{y}$  та  $\bar{y}^*$ , де

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 130,24; \quad \bar{y}^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^*}{n} = 130,24,$$

оскільки  $\bar{y} = \bar{y}^*$ , попередні розрахунки правильні.

Визначимо ступінь адекватності моделі за статистичними даними табл. 2.1 через відхилення між фактичними значеннями та обчисленими за моделлю. Запишемо їх як елементи вектора  $e$ :

$$e_i = y_i - y_i^*.$$

Середнє значення дорівнює нулю, отже, розбіжностей не існує, модель адекватна.

### 3. Перевірка статистичної значущості коефіцієнта множинної детермінації $R^2$ за критерієм Фішера

Для перевірки статистичної значущості впливу регресорів на залежну змінну моделі використовуємо статистичний критерій Фішера

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-m-1}{m}.$$

Для рівня значущості  $\alpha = 0,05$  та степенях вільності  $k_1 = m = 2$ , і  $k_2 = n - m - 1 = 22$  за таблицею (дод. 3) знаходимо  $F(\alpha; k_1; k_2) = 3,44$ .

Спостережуване значення критерію Фішера:

$$F^* = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,6736}{1-0,6736} \cdot \frac{22}{2} = 22,7.$$

Критерій Фішера має правобічну критичну область із критичною точкою 3,44. Оскільки  $F^* > F$ , то статистична гіпотеза  $H_0: R^2 = 0$  відхиляється, отже, всі регресори мають вплив на залежну змінну.

5. Оцінювання дисперсій оцінок параметрів  $S_{\beta_0}^2, S_{\beta_1}^2, S_{\beta_2}^2$  та їх стандартних похибок  $S_{\beta_0}, S_{\beta_1}, S_{\beta_2}$ . Незміщена оцінка для дисперсії залишків  $\sigma_\varepsilon^2$ :

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum e_i^2; \quad S_\varepsilon^2 = \frac{1}{22} \cdot 438 \approx 19,9.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів:

$$\text{cov}(\beta^* (\beta^*)^T) = S_\varepsilon^2 (X^T X)^{-1};$$

звідки дисперсії оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0}^2 = 13,38; \quad S_{\beta_1}^2 = 0,0658; \quad S_{\beta_2}^2 = 1,725.$$

Середньоквадратичні відхилення оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0}^* = \sqrt{S_{\beta_0}^2} = 3,6587; \quad S_{\beta_1}^* = \sqrt{S_{\beta_1}^2} = 0,256; \quad S_{\beta_2}^* = \sqrt{S_{\beta_2}^2} = 1,313.$$

6. *Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ . Сформулюємо нульову гіпотезу  $H_0: \beta_i = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_\alpha: \beta_i \neq 0$ :*

$$t_{\beta_j}^* = \frac{\beta_j^* - 0}{S_{\beta_j^*}}, j = 0, 1, 2; \quad t_{\beta_0}^* = \frac{115,4}{3,658} = 31,5;$$

$$t_{\beta_1}^* = \frac{1,44}{0,256} = 5,62; \quad t_{\beta_2}^* = \frac{2,79}{1,313} = 2,12.$$

За обчисленими значеннями  $t_{\beta_i}^*$  знаходимо, що оскільки  $t_{\beta_i}^* > 2,07 (i = 0, 1, 2)$ , то нульову гіпотезу про рівність нулю параметрів  $\beta_0, \beta_1$  та  $\beta_2$  відхиляємо.

7. *Розрахунок довірчих інтервалів оцінок параметрів  $\beta_1$  та  $\beta_2$  із надійністю  $\gamma = 0,95$ .*

$$(115,4 - 3,658 \cdot 2,07) < \beta_0 < (115,4 + 3,658 \cdot 2,07);$$

$$(-1,44 - 0,256 \cdot 2,07) < \beta_1 < (-1,44 + 0,256 \cdot 2,07); \quad (2.57)$$

$$(2,79 - 1,313 \cdot 2,07) < \beta_2 < (2,79 + 1,313 \cdot 2,07);$$

або

$$107 < \beta_0 < 123; \quad -1,97 < \beta_1 < -0,91; \quad 0,067 < \beta_2 < 5,516.$$

Як бачимо, з пасивного експерименту (табл. 2.2), за неточно виміряної напруги  $U$  і майже точних значень струмів якоря і збудження, довірчі області оцінок параметрів досить великі. Суттєве зменшення розкиду інтервальних оцінок (2.57) можливе або шляхом збільшення числа вибірки даних, або шляхом побудови активного експерименту, за умови великих вибірок використання вагових функцій з метою псевдо-ортогоналізації регресорів (див. підрозд. 2.4).

### **2.1.9. Побудова нелінійних динамічних моделей резистивних елементів ЕТК**

Традиційно більшість резисторів прийнято вважати **ідеальними (лінійними, стаціонарними, безінерційними)**. Ідеальний резистор повинен мати активний опір  $R$ , на якому згідно до закону

Джоуля–Ленца електрична енергія  $W_e$  за час  $t$  повністю і безповоротно перетворюється на теплову  $Q$ :

$$Q = I^2 R Q t. \quad (2.58)$$

Теплова енергія витрачається на нагрів резистора і оточуючого середовища. Щоб визначити як впливає температура  $\theta^0$  резистора на його опір  $R$  скористуємось фізико-математичною моделлю опору  $R$  резистора:

$$R = \frac{l}{\gamma S}, \quad (2.59)$$

де  $l$  — довжина;  $S$  — площа поперечного перерізу;  $\gamma$  — питома провідність провідника резистора.

Як відомо із курсу фізики,

$$\gamma = |e| n \beta, \quad (2.60)$$

де  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд електрона;  $n$  — концентрація вільних електронів у провіднику;  $\beta$  — коефіцієнт вільного пробігу електрону, який для металів зменшується при збільшенні температури  $\theta^0$  внаслідок збільшення протидії напрямленому руху тепловим хаотичним. Тобто

$$\beta = \beta(\theta^0) \quad (2.61)$$

Тоді опір  $R$  буде функцією  $\theta^0$ . Для відносно малих змін  $\Delta\theta^0$  ця залежність майже лінійна:

$$R(\theta^0) \cong R(\theta_0^0) [1 + \alpha \Delta\theta^0], \quad (2.62)$$

де  $\alpha$  — температурний коефіцієнт опору.

Як відомо з термодинаміки, для малих приростів  $dQ$  теплоти  $Q$  має місце диференціал:

$$dQ = c m d\theta^0 + K_{\text{тв}} S_{\text{ох}} \Delta\theta^0 dt, \quad (2.63)$$

де  $c$  — теплоємність;  $m$  — маса;  $K_{\text{тв}}$  — коефіцієнт тепловіддачі,  $S_{\text{ох}}$  — площа охолодження резистора.



Швидкістю зміни теплоти  $Q$  є потужність:

$$\frac{dQ}{dt} = P = I^2 R(\theta^0) = cm \frac{d\theta^0}{dt} + K_{\text{тв}} S_{\text{ок}} \Delta\theta^0. \quad (2.64)$$

Якщо для спрощення викладок прийняти, що потужність  $P$  незмінна, то в усталеному режимі

$$P = I^2 R(\theta_{\infty}^0) = K_{\text{тв}} S_{\text{ок}} \Delta\theta_{\infty}^0, \quad (2.65)$$

де  $\Delta\theta_{\infty}^0 = \theta_{\infty}^0 - \theta_0^0$ , то рівняння (2.64) набуває вигляду:

$$\tau_m \frac{d\Delta\theta^0}{dt} + \Delta\theta^0 = \Delta\theta_{\infty}^0, \quad (2.66)$$

де  $\tau_m = \frac{cm}{K_{\text{тв}} S_{\text{ок}}}$  — теплова стала часу резистора,  $\Delta\theta^0 = \theta^0(t) - \theta_0^0$ ,

$$\frac{d\Delta\theta^0}{dt} = \frac{d\theta^0}{dt}.$$

Для потужних резисторів стала часу може бути значною. Нагрів провідника резистора згідно (2.66) відбувається за експоненціальним законом (рис. 2.1):

$$\theta^0(t) = \theta^0(0) + \Delta\theta^0(t) = \theta^0(0) + \Delta\theta_{\infty}^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right). \quad (2.67)$$

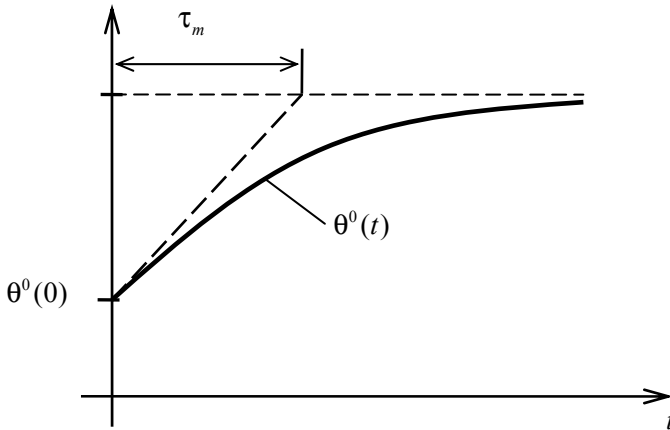


Рис. 2.1. Графік нагріву резистора

Відповідно до  $R(\theta^0(t))$ , з урахуванням рівнянь (2.62) і (2.67), буде змінюватись у часі, змінюючи за тією самою експонентою свій опір від  $R(\theta_0^0)$  до  $R(\theta_\infty^0)$  (рис. 2.2):

$$\begin{aligned} R(\theta^0(t)) &= R(\theta^0(0)) [1 + \alpha \Delta \theta^0(t)] = \\ &= R(\theta^0(0)) \left[ 1 + \alpha \Delta \theta_\infty^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

При підключенні резистора до ідеального джерела постійної напруги  $U$  струм у колі «джерело — резистор» за законом Ома з урахуванням залежності (2.68) буде зменшуватись у часі приблизно за тим же експоненціальним законом (рис. 2.3):

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U}{R(\theta^0(0)) \left[ 1 + \alpha \Delta \theta_\infty^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) \right]} \approx \\ &\approx I(0) \left[ 1 - \alpha \Delta \theta_\infty^0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

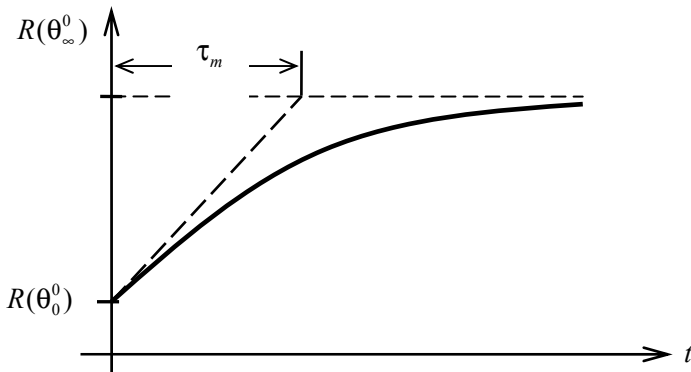


Рис. 2.2. Графік  $R(\theta^0(t))$

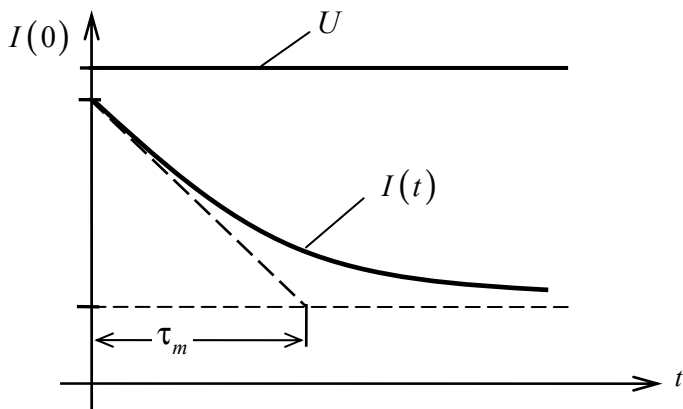


Рис. 2.3. Графік  $I(\theta^0(t))$

Графіку  $I(t)$  (рис. 2.3) відповідає схема **заміщення реального резистора** (рис. 2.4), як  $RC$ -двополюсника:

У момент  $t = 0$  комутації ємнісний опір нульовий. Тому

$$\frac{R_1 R(\theta_\infty^0)}{R_1 + R(\theta_\infty^0)} = R(\theta^0(0)), \quad (2.70)$$

звідки 
$$R_1 = \frac{R_0 R_\infty}{R_\infty - R_0}. \quad (2.71)$$

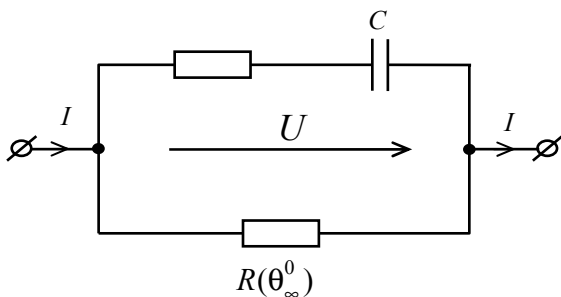


Рис. 2.4. Схема заміщення резистора

Ємність  $C$  визначаємо з умови  $\tau_m = R_1 C$  з урахуванням рівнянь (2.68) і (2.66):

$$C = \frac{cm(R_\infty - R_0)}{K_{\text{тв}} S_{\text{ох}} R_\infty R_0}. \quad (2.72)$$

Залежно від динаміки зміни напруги  $U$ , коефіцієнтів  $m$ ,  $K_{\text{тв}}$ ,  $S_{\text{ох}}$ ,  $c$ ,  $\sigma$ , приросту  $\Delta\theta^0$  залежність  $R(I^2(\theta^0(t)))$  може бути як суттєвою, так і несуттєвою.

Відповідно резистор може розглядатися як безінерційний, так і інерційний, як лінійний елемент зі сталим опором  $R$ , так і нелінійний, де  $R$  — функція  $I^2$ .

Повернемося до усталеного режиму  $\left(\frac{d\theta^0}{dt} = 0\right)$  і **визначимо аналітичну залежність  $R(I)$** .

З рівняння (2.64) при  $\frac{d\theta^0}{dt} = 0$  і  $t \rightarrow \infty$  отримаємо:

$$I^2 R(\theta_\infty^0) = K_{\text{тв}} S_{\text{ох}} \Delta\theta_\infty^0. \quad (2.73)$$

Звідси найдемо  $\Delta\theta_\infty^0$  і підставимо в рівняння (2.62):

$$R(\theta_\infty^0) \cong R(\theta_0^0) \left[ 1 + \alpha \frac{R(\theta_\infty^0)}{K_{\text{тв}} S_{\text{ох}}} I^2 \right],$$

або

$$R(\theta_\infty^0) \cong \frac{R(\theta_0^0)}{1 - \alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{тв}} S_{\text{ох}}} I^2}. \quad (2.74)$$

Враховуючи, що для матеріалу резисторів  $\alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}} I^2 \ll 1$ , роз-

клавши рівняння (2.74) у ряд Тейлора і беручи тільки перший член розкладання, отримаємо:

$$R(\theta_\infty^0) = R(\theta_0^0) [1 + \eta I^2], \quad (2.75)$$

де  $\eta$  — параметр резистора, який визначає нелінійний вплив струму  $I$  на опір  $R$ ,

$$\eta = \alpha \frac{R(\theta_0^0)}{K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}}. \quad (2.76)$$

Параметр  $\eta$  пропорційний  $\alpha$  і зворотно пропорційний  $K_{\text{ТВ}} S_{\text{ОХ}}$ .

Залежно від величини  $\eta$  і  $I^2$ , а також точності вимірювань, резистор слід розглядати як лінійний чи нелінійний елемент.

У наступному експерименті при його детальному плануванні слід розглядати дві цілі:

1) Для існуючих в ЕТК на стенді приладів **перевірити чи будуть резистори лінійними** (опір  $R$  незмінним) з урахуванням точності вимірювання напруги  $U$  і струму  $I$ .

2) Шляхом оптимального планування експерименту (значень  $U, I$  і кількості їх вимірювань) **визначити малий параметр  $\eta$** .

Для **вирішення першої цілі** (перевірки чи можна вважати резистори стенду лінійними елементами в межах похибок вимірювальних приладів стенду) — проведемо планування експерименту з вибором оптимального варіанту.

Наприклад, лабораторний стенд ЕВ-4, як ЕТК, має стрілочні амперметри з рівномірною шкалою від 0 до 5 А класом точності  $\gamma = 1,5 \%$ ; цифровий мультиметр виміру напруги або опору з абсолютною похибкою — одиницею молодшого десяткового розряду, тобто  $\pm 10^{-5}$ . Опір  $R(0)$  холодного резистора можна досить точно виміряти цифровим омметром.

Струм омметра практично не змінить температуру резистора внаслідок його малості. Опір нагрітого резистора визначимо методом вольтметра-амперметра для максимально допустимого струму

$I_{\max} \cong 1,2 I_n$ , де  $I_n$  — номінальне значення. Резистори стенда мають паспортні дані  $P = 50$  Вт,  $R = 100$  Ом, тоді  $I_{\max} \approx 0,8 A$ .

Для зменшення систематичної похибки, пов'язаної з ненульовим опором амперметра, вимірюємо його опір за допомогою цифрового омметра. Тоді незміщена оцінка  $\hat{R}$  опору резистора  $R$  дорівнюватиме:

$$\hat{R} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} - R_A, \quad (2.77)$$

де  $\hat{U}$ ,  $\hat{I}$  — виміри цифровим вольтметром напруги джерела  $\hat{U}$ , аналоговим амперметром струму  $\hat{I}$  і  $R_A$  — вимір опору амперметра (маючи велику точність цифрового омметра можна вважати точним).

Виміри  $\hat{U}$  і  $\hat{I}$  мають випадкові похибки, які некорельовані як між собою, так і між вимірами і, як правило, мають нормальний гаусовий розподіл.

Абсолютну похибку амперметра визначимо за його класом його точності ( $\gamma = 1,5 \%$ )

$$\Delta \hat{I} = \frac{\gamma I_{\max}}{100} = 0,015 A.$$

Абсолютна похибка вимірювання напруги пов'язана не стільки з вольтметром (він досить точний), як з нестабільністю напруги джерела  $U$ . Для оцінювання нестабільності виконаємо  $n$  вимірювань  $\hat{U}$ , знайдемо оцінку середнього значення

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{U}(k) \quad (2.78)$$

і незміщену оцінку  $\hat{\sigma}_U$  середньоквадратичного розкиду  $\sigma_U$  вимірів  $\hat{U}(k)$  відносно  $\bar{U}$ :

$$\hat{\sigma}_U = \left( \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\hat{U}(k) - \bar{U})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.79)$$

Оцінку нагрітого резистора при  $I_{\max} = 0,8A$  отримаємо за формулою (2.77), де в якості  $\hat{U}$  візьмемо  $\bar{U}$  (2.78). Висновок про лінійність чи не лінійність резистора з відповідною достовірністю можна зробити шляхом співставлення опору  $R$  холодного резистора (вимір омметром) і  $\hat{R}$  як відношення (2.77)  $\bar{U}$  до  $\hat{I}$ . Вважаючи похибку  $\delta\hat{R}/R$  досить малою, наближено маємо:

$$\frac{\delta\hat{R}}{R} \cong \left[ \frac{\partial\hat{R}}{\partial\hat{U}} \Big|_{U,I} \delta\hat{U} + \frac{\partial\hat{R}}{\partial\hat{I}} \Big|_{U,I} \delta\hat{I} \right] R^{-1} = \frac{\delta\hat{U}}{U} - \frac{\delta\hat{I}}{I}. \quad (2.80)$$

Похибки  $\delta\hat{U}$  і  $\delta\hat{I}$  за своєю сутністю мають випадковий характер. Це, як правило, нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням і дисперсіями  $\sigma_{\hat{U}}^2$ ,  $\sigma_{\hat{I}}^2$ . У результаті  $n$  спостережень напруги  $U$  маємо вибірку  $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_n$  об'єму  $n$ . У процесі виміру  $\hat{U}(k)$ ,  $k = \overline{1, n}$  показ стрілочного амперметра  $\hat{I}$ , внаслідок його інерційності і грубості, майже не змінюється. Таким чином незміщена оцінка  $S_{\hat{U}}^2$  дисперсії  $\sigma_{\hat{U}}^2$  визначається з експерименту

$$S_{\hat{U}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left( \hat{U}_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \right)^2, \quad (2.81)$$

а оцінка  $S_{\hat{I}}^2$  дисперсії  $\sigma_{\hat{I}}^2$  визначається через клас точності  $\gamma$  амперметра, як квадрат абсолютної похибки  $\Delta I$ , яку приймемо рівною двом  $\sigma_{\hat{I}}$ :

$$S_{\hat{I}}^2 = \left( \frac{\gamma I_{\max}}{100 \cdot \hat{I}} \right)^2 \frac{1}{4}. \quad (2.82)$$

Враховуючи взаємну некорельованість випадкових похибок  $\delta\hat{U}$  і  $\delta\hat{I}$ , та їх малість відносно  $U$  і  $I$ , з урахуванням (2.80), отримаємо оцінку  $S_{\frac{\delta\hat{R}}{R}}$  кореня з дисперсії  $\sigma_{\frac{\delta\hat{R}}{R}}^2$ :

$$S_{\frac{\hat{R}}{R}} \cong \sqrt{\frac{S_U^2}{\frac{U^2}{2}} + \frac{S_I^2}{\frac{I^2}{2}}}, \quad (2.83)$$

де  $\bar{U}$ ,  $\bar{I}$  — середні значення напруги і струму за  $n$  дослідів.

Результат вимірювання опору  $R$  холодного резистора цифровим омметром з точністю до п'яти десяткових розрядів можна прийняти за точне значення  $R(\theta_0^0)$ , оскільки струм омметра надто малий і не нагріває резистор. Результати вимірювання (2.77) опору  $R(\theta^0)$  резистора, нагрітого струмом  $I = 1, 2 I_H$ , мають середнє значення

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{R}_k \quad (2.84)$$

і оцінку дисперсії

$$S_{\delta R}^2 = \bar{R} \left( \frac{S_U^2}{\frac{U^2}{2}} + \frac{S_I^2}{\frac{I^2}{2}} \right). \quad (2.85)$$

Для прийняття рішення щодо неістотності зміни опору від струму ( $H_0$  гіпотеза), чи істотності ( $H_1$  гіпотеза) побудуємо випадкову величину  $t$ :

$$t = \lim_{S_{\delta R}(\theta_0^0) \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}(\theta_0^0)}{\sqrt{\frac{2}{n} \frac{(n-1)S_{\delta R}^2(\theta^0) + (n-1)S_{\delta R}^2(\theta_0^0)}{2n-2}}} = \frac{\bar{R}(\theta^0) - \bar{R}(\theta_0^0)}{S_{\delta R}(\theta^0)} \sqrt{n}. \quad (2.86)$$

Величина  $t$  має розподіл Стюдента з  $n - 1$  степенями свободи. Двостороння критична область симетрична відносно нуля і знаходиться за умови, що ймовірність прийняття гіпотези  $H_1$  дорівнює взятому рівню значущості  $\alpha$ , коли правильна гіпотеза  $H_0$  ( $\alpha$  — помилка першого роду).

Критична точка  $t_{n-1, \alpha}$  знаходиться за таблицею розподілу Стюдента для кількості степенів свободи  $n - 1$  і ймовірності



$$P\{|T| \leq t_{n-1, \alpha}\} = 1 - \alpha. \quad (2.87)$$

Якщо  $|T| < t_{n-1, \alpha}$ , то приймається гіпотеза  $H_0$ , а якщо  $|T| > t_{n-1, \alpha}$ , — то гіпотеза  $H_1$ .

Перевіримо  $H_0$  гіпотезу для опору резистора і опору лампи розжарювання при зміні струму від мінімального до струму 120 % від номінального.

### Перевірка резистора на лінійність

Точні показання омметра:  $\bar{R}(\theta_0^0) = 100 \text{ Ом}$ .

Десять результатів вимірювання напруги  $\hat{U}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ ,  $n = 10$  (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{U}_k$ , В	80,4	79,5	80,5	79,8	81,01	78	82	80	80,5	79
$\hat{R}$ , Ом	100,5	99,37	100,5	99,75	101,3	97,5	102,5	100	100,6	98,75

$$\bar{U} = 80,07 \text{ В}, \quad S_U^2 = 1,213 \text{ В}^2, \quad \bar{R} = 100,09 \text{ Ом};$$

$$\text{оцінка (2.82)} \quad S_i^2 = \left( \frac{1,5 \cdot 1}{100 \cdot 0,8} \right)^2 \frac{1}{3} = 0,000117;$$

$$\text{оцінка (2.85)} \quad S_{\delta R}^2 = 100 \cdot \left( \frac{1,213}{6411} + \frac{0,000117}{0,64} \right) = 0,037;$$

$$\text{величина (2.86)} \quad t = \frac{100,09 - 100}{\sqrt{0,037}} \cdot \sqrt{10} = 1,48;$$

кількість степенів вільності 9; похибка першого роду  $\alpha = 0,05$ ; критичне значення (за таблицями  $t$ -критерій Стьюдента)  $t_{9;0,05} = t(9; 0,95) = 2,26$ .

Оскільки  $|t| = 1,48$  менше  $t(9; 0,95) = 2,26$ , то можна вважати, що нуль-гіпотеза справедлива і розглядати резистори стенду «ЭВ-4» як лінійні.

### Перевірка лампи розжарювання на лінійність

Точний показ омметра:  $\bar{R}(\theta_0^0) = 100 \text{ Ом}$ . Для номінального режиму:

$$U_H = 220 \text{ В}, P_H = 200 \text{ Вт}, I_H = 200/220 = 0,9 \text{ А},$$

опір

$$R(\theta) = \hat{R}(I_H) = (220 \text{ В} \pm 5 \text{ В}) / (0,9 \text{ А} \pm 0,015 \text{ А}) = \\ = (238,89 \div 250) \text{ Ом}.$$

У даному разі немає необхідності в статистичній перевірці  $H_0$  гіпотези, бо навіть у найгіршій ситуації оцінка  $\hat{R}(I_H)$  у 2,4 рази більша за  $\bar{R}(\theta_0^0)$ . Результати експерименту показують, що лампа є нелінійним елементом у діапазоні струмів від нуля до номінального.

Якщо прийняти модель (2.75) залежності  $R(I^2)$ , то з отриманих даних можна визначити параметр (2.76)  $\eta$ :

$$\eta \cong \frac{R(\theta_\infty^0) - R(\theta_0^0)}{R(\theta_0^0) I^2} \cong \frac{(244 \pm 6) - 100}{100 \cdot 0,81} = 1,78 \pm 0,07 \text{ А}^{-2}.$$

Для визначення малого параметра моделі (2.75) резистивного елемента слід спланувати і провести більш точний експеримент, який впливає з таких міркувань.

Запишемо залежність (2.75) з урахуванням корекції (2.77) для  $k$ -го результату вимірювання ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$$\hat{R}(I_k) = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k} - R_A \cong R(\theta_0^0) [1 + \eta I_k^2] + \delta_{\hat{R}_k}, \quad (2.88)$$

де  $\delta_{\hat{R}_k}$  — випадкова нормально розподілена похибка оцінки  $\hat{R}$  в  $k$ -му досліді.

Подано рівняння (2.88) у стандартному для регресійного аналізу вигляді:

$$y(k) = \beta_0 + \beta_1 I_k^2 + \delta y_k, \quad (2.89)$$

де  $\beta_0 = R(\theta_0^0)$ ,  $\beta_1 = R(\theta_0^0)\eta$ ,  $\delta y_k = \delta_{\hat{R}_k}$ .

Апріорі відомо, що  $|\delta_{\hat{I}}| \ll I$ ,  $|\delta_{\hat{U}}| \ll U$ , тому

$$\delta y \approx \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}} \right|_{U,I} \delta \hat{U} + \left. \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}} \right|_{U,I} \delta \hat{I} = \frac{1}{I} \delta \hat{U} - \frac{R}{I} \delta \hat{I} = \frac{\delta \hat{U} - R \delta \hat{I}}{I}. \quad (2.90)$$

Математичне очікування  $\delta y$  внаслідок симетричності розподілу похибок  $\delta \hat{U}$  і  $\delta \hat{I}$  дорівнює нулю.

Дисперсія  $k$ -го результату вимірювання

$$\sigma_{\hat{y}_k}^2 = M \left\{ \left( \frac{\delta \hat{U}_k - R \delta \hat{I}_k}{I_k} \right)^2 \right\} = \frac{\sigma_{\hat{U}_k}^2 + R \sigma_{\hat{I}_k}^2}{I_k} = \frac{\sigma^2}{I_k^2}. \quad (2.91)$$

Похибки незалежні, тому їх коваріаційна матриця діагональна:

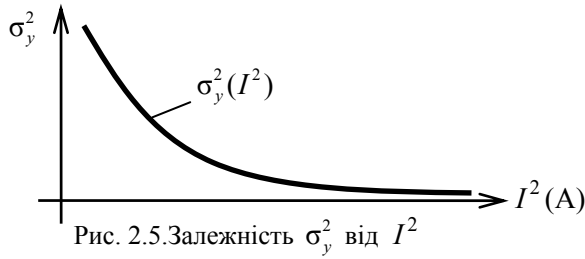
$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_2}^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_n}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Процес (2.90) — гетероскадестичний, тобто має залежну від  $I_k$  дисперсію (2.91) рис. 2.5.

Для таких процесів оптимальним за точністю оцінок  $\hat{\beta}_0$  і  $\hat{\beta}_1$  буде метод марковських оцінок, у якому ці оцінки знаходяться за умови мінімуму зваженого середнього квадрата різниці  $\hat{y}_k$  і  $\beta_0 + \beta_1 I_k^2$  моделі (2.89):

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \arg \min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{k=1}^n \epsilon_k^2 \sigma_k^{-2}, \quad (2.93)$$

$$\text{де } \epsilon_k^2 = [\hat{y}_k - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 I_k^2]^2, \quad \sigma_k^{-2} = \frac{I_k^2}{\sigma^2}.$$



Інакше кажучи, мінімізується середній квадрат різниці лівої і правої частини рівняння

$$\hat{y}_k \frac{I_k}{\sigma} = \beta_0 \frac{I_k}{\sigma} + \beta_1 \frac{I_k^2}{\sigma}. \quad (2.94)$$

Скоротимо на  $\sigma$  і замінимо  $\hat{y}_k I_k$  на  $\hat{U}_k$ . Тоді рівняння (2.89) набуває вигляду

$$\hat{U}_k = \beta_0 I_k + \beta_1 I_k^2 + \delta \hat{U}_k, \quad (2.95)$$

для якого коефіцієнти  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  визначаються звичайним методом найменших квадратів:

$$\hat{\beta} = (x^T x)^{-1} x^T y, \quad (2.96)$$

$$\text{де } \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}, \quad x^T y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k \\ \sum_{k=1}^n \hat{U}_k \hat{I}_k^2 \end{bmatrix}, \quad x^T x = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 \end{bmatrix}.$$

Якщо струм  $I_k$  аналогового вимірювального приладу вважати незмінним, то коваріація оцінок дорівнюватиме

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{U}}^2 (x^T x)^{-1}, \quad (2.97)$$

$$\text{де } (x^T x)^{-1} = \frac{1}{\det(x^T x)} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 & -\sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \\ -\sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 & \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \end{bmatrix},$$

$$\det(x^T x) = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^2 \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^6 - \left( \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^4 \right)^2.$$

Еліпс розкиду оцінок відповідно до (2.94) і (2.97) буде мінімальним. Але оцінки (2.96) будуть зміщені внаслідок неточності вимірювання  $I_k$ .

Для зменшення похибки в оцінюванні параметрів  $\beta_0$  і особливо  $\beta_1$  моделі (2.89), скористаємося додатковою апріорною інформацією про те, що вольт-амперна характеристика резистора обов'язково проходить через нуль. З урахуванням цього побудуємо оптимальний план експерименту.

Вольт-амперні характеристики лінійного резистора

$$U_{\text{л}} = R_{\text{ст.маx}} I = \frac{U_{\text{маx}}}{I_{\text{маx}}} I \quad (2.98)$$

і нелінійного

$$U_{\text{нл}} = (\beta_0 + \beta_1 I^2) I \quad (2.99)$$

показано на рис. 2.6.

У точках  $(0,0)$  і  $(U_{\text{маx}}, I_{\text{маx}})$  вольт-амперна характеристика лінійного і нелінійного резисторів співпадають. Тоді  $R_{\text{ст.маx}} = \beta_0 + \beta_1 I_{\text{маx}}^2$ .

Підставимо  $R_{\text{ст.маx}}$  у рівняння (2.98) і віднімемо з (2.98) рівняння (2.99):

$$U_{\text{л}} - U_{\text{нл}} = \beta_1 (I_{\text{маx}}^2 - I^2) I. \quad (2.100)$$

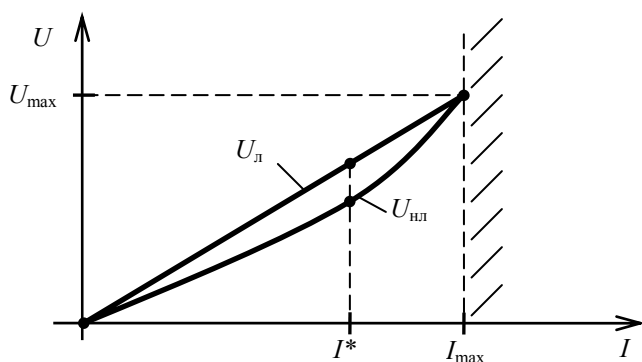


Рис. 2.6. ВАХ резисторів

Визначимо оптимальне значення  $I^*$ , за якого різниця між  $U_{\text{л}}$  і  $U_{\text{нл}}$  (2.100) максимальна

$$\frac{d}{dI}(U_{\text{л}} - U_{\text{нл}}) = \beta_1 I_{\text{max}}^2 - 3\beta_1 I^{*2} = 0 \Rightarrow I^* = I_{\text{max}} / \sqrt{3}. \quad (2.101)$$

Таким чином маємо дві точки оптимального плану експерименту:  $I^*$  і  $I_{\text{max}}$ .

Із (2.100), (2.101) знаходимо, що

$$\beta_1 = \frac{U_{\text{л}}^* - U_{\text{нл}}^*}{(I_{\text{max}}^2 - I^{*2})I^*}. \quad (2.102)$$

Підставивши (2.102) у (2.99) при  $I = I_{\text{max}}$ , знаходимо  $\beta_0$ :

$$\beta_0 = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} - \beta_1 I_{\text{max}}^2 = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} - \frac{U_{\text{л}}^* - U_{\text{нл}}^*}{I^*} \frac{I_{\text{max}}^2}{I_{\text{max}}^2 - I^{*2}}. \quad (2.103)$$

Оскільки  $U_{\text{л}}^* = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} I^*$ ,  $\frac{U_{\text{л}}^*}{I^*} = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}}$ , то вираз (2.102) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{U_{\text{max}}(I^*/I_{\text{max}}) - U_{\text{нл}}^*}{(I_{\text{max}}^2 - I^{*2})I^*} = \frac{U_{\text{max}}/\sqrt{3} - U_{\text{нл}}^*}{2I_{\text{max}}^3/(3\sqrt{3})} = \\ &= \frac{3[U_{\text{max}} - \sqrt{3}U_{\text{нл}}^*]}{2I_{\text{max}}^3}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Вираз (2.103) отримаємо у такій формі:

$$\beta_0 = \frac{U_{\text{max}}}{I_{\text{max}}} - \frac{3[U_{\text{max}} - \sqrt{3}U_{\text{нл}}^*]}{2I_{\text{max}}^3} I_{\text{max}}^2 = \frac{3\sqrt{3}U_{\text{нл}}^* - U_{\text{max}}}{2I_{\text{max}}}. \quad (2.105)$$

Якщо похибка вимірювання і  $I_{\text{max}}$  і  $I^*$  набагато менша нестабільності  $U_{\text{max}}$  і  $U_{\text{нл}}^*$ , то похибка  $\delta\hat{\beta}_1$  визначається першим диференціалом

$$\delta\hat{\beta}_1 \cong \frac{\partial\hat{\beta}_1}{\partial U_{\text{max}}} \delta\hat{U}_{\text{max}} + \frac{\partial\hat{\beta}_1}{\partial U_{\text{нл}}^*} \delta\hat{U}_{\text{нл}}^* = \frac{3}{2I_{\text{max}}^3} \delta U_{\text{max}} - \frac{3}{2I_{\text{max}}^3} \delta U_{\text{нл}}^*. \quad (2.106)$$

Дисперсія  $\hat{\beta}_1$ :

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{I_{\max}^6} \left[ \sigma_{\hat{U}_{\max}}^2 + 3\sigma_{\hat{U}_{\text{нл}}}^2 \right]. \quad (2.107)$$

Оскільки  $U_{\max}$  і  $U_{\text{нл}}^*$  вимірюються одним і тим же приладом, то їх дисперсії будуть однаковими і рівними  $\sigma_{\hat{U}}^2$ . Загальну кількість  $n$  вимірювань розіб'ємо на  $kn$  вимірювань  $U_{\max}$  і  $(1 - kn)$  вимірювань  $U_{\text{нл}}^*$ , де  $k < 1$ . Дисперсії усереднених значень  $U_{\max}$  і  $U_{\text{нл}}^*$  будуть в  $kn$  і  $(1 - kn)$  разів меншими. Тоді рівняння (2.107) набирає вигляду

$$\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \left[ \frac{1}{kn} + \frac{3}{(1 - kn)n} \right] = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{1 + 2k}{k(1 - k)n}. \quad (2.108)$$

Визначимо  $k^*$  за умови мінімуму  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$

$$\frac{\partial \sigma_{\hat{\beta}_1}^2}{\partial k} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{I_{\max}^6} \frac{2k(1 - k)n - (n - 2kn)(1 + 2k)}{(k(1 - k)n)^2} = 0. \quad (2.109)$$

Звідси  $k^* = 0,365$ .

Тепер із співвідношень (2.108), (2.109) можна визначити необхідну кількість  $n^*$  дослідів, щоб за відомими  $\sigma_{\hat{U}}^2$  і  $k^*$  отримати оцінку  $\hat{\beta}_1$  із заданою дисперсією  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ :

$$n^* = 16,8 \cdot \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{\sigma_{\hat{\beta}_1}^2} \frac{1}{I_{\max}^6}. \quad (2.110)$$

Чим менше  $\beta_1$  і відповідно бажане  $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2$ , тим більше  $n^*$ . Але значення  $\beta_1$  невідоме. Тому, маючи оптимальний план  $\left( I^* = \frac{I_{\max}}{\sqrt{3}}, I_{\max} \right)$ , де кількість вимірювань у точці  $I^*$  складає  $(1 - k)n$ , а  $I_{\max}$  —  $kn$ , або відповідно  $0,645n$  і  $0,365n$ , будемо поступово збільшувати  $n$ , наприклад  $n = 10, n = 20, \dots$ . Для кожного  $n_i, i = 1, 2, \dots$  розраховуємо оцінку  $\hat{\beta}_1$ , як середнє по  $n_i$  значення (2.104)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{3[U_{\max}(j) - \sqrt{3}U_{\text{нл}}^*(j)]}{2I_{\max}^3(j)}, \quad (2.111)$$

по (2.111) розрахуємо її середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{16,8 \frac{\sigma_{\hat{U}}^2}{n_i} \cdot \frac{1}{I_{\max}^6}}, \quad (2.112)$$

перевіримо значущість оцінки (2.111)  $\hat{\beta}_1$ , що має оцінку (2.112) середнього квадратичного відхилення, за таблицею  $t$ -критерію Стьюдента для  $\alpha = 0,1$  та  $(n_i - 1)$  степенів вільності. Якщо

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} < t(n_i - 1; 0,9), \quad (2.113)$$

то оцінка значуща; якщо ні, то слід продовжити експеримент з більшим  $n_i$  доки не буде виконана умова (2.113).

Отримання таким чином параметрів  $\beta_0$  і  $\beta_1$  слаболінійної залежності  $U(I)$  дає можливість (шляхом уведення корекції) використовувати не ідеальні резистори у відповідних вимірювальних системах.

## 2.2. Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів ЕТО

Розглянемо універсальний алгоритм [11], який об'єднав різні алгоритми МНК, Гаусса–Ньютона, Байєса, Маркова, Тихонова з розширеним вектором констант  $\alpha$ , які дозволяють оптимізувати задачу ідентифікації лінійних і нелінійних, безперервних за головним показником  $I$  і дискретних, стаціонарних і нестаціонарних, одно- і багатовимірних, детермінованих і стохастичних об'єктів, з однієї і декількох вибірок даних  $(X, Y)$ . Загалом:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & \dots & y_m(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(m) & \dots & y_m(M) \end{bmatrix},$$



$$x_i(k) = x_i^*(k) + N_i(k), \quad i = \overline{1, n}; n \geq m;$$

$$y_j(k) = y_j^*(k) + \varepsilon_j(k), \quad j = \overline{1, m}; k = \overline{1, M}; M \geq n,$$

де  $x_i^*, y_j^*$  — точні значення;  $N_i, \sum_j$  — їх випадкові взаємонекорельовані похибки, тобто для будь-якого зсуву  $\tau$ , та будь-яких  $i, \varepsilon$ ,  $R_{N_i N_e}(\tau) = R_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\tau) = R_{x_i^* N_j} = R_{N_i y_j^*}(\tau) = 0$ , якщо  $i \neq j$ . Модель об'єкта ідентифікації

$$y^* = f(x^*, \beta, t), \quad (2.114)$$

де

$$f^T = [f_1, \dots, f_m].$$

Зокрема, якщо  $y^* = \dot{x}_1^*, x_2^* = u, (x_1^*, x_2^*) = x^*$ , то модель (2.114) еквівалентна системі нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1^* = f(x_1^*, u, \beta, t),$$

які описують динаміку об'єкта керування, де  $u$  — керуючі змінні; якщо  $y^* = x_1^*(k+1), x_1^* = u(k)$ , то рівняння (2.114) еквівалентно системі нелінійних різницьових рівнянь

$$x_1^*(k+1) = f(x_1^*(k), u(k), \beta, k).$$

Варіюючи розмірностями відповідних векторів, можна отримати системи зі скалярними або векторними змінними.

*Узагальнений критерій якості задачі ідентифікації*

$$J = \sum_{p=1}^4 J_p \quad (2.115)$$

складено з чотирьох компонентів.

*Перший компонент критерію (2.115)*

$$J_1 = \sum_{p=1}^m \varepsilon_j^T Q_j^{-1} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j^* = \varepsilon_j - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta)^T} \Delta \beta, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta)^T} = \left( \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta_1)}, \dots, \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta \beta_s)} \right), \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j(\hat{\beta}(q-1)),$$

$$\varepsilon_j(\hat{\beta}(q-1)) = y_j - \hat{y}_j(\hat{\beta}(q-1)),$$

де  $\hat{y}_j (j = \overline{1, m})$  — вихід моделі на  $(q-1)$ -му кроці;  $q$  — номер кроку ітерації;  $\beta^T = (\beta_1, \dots, \beta_s)$  — вектор невідомих параметрів;

$$Q_j = \begin{bmatrix} M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} & \dots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} \\ \dots & \dots & \dots \\ M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} & \dots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} \end{bmatrix}.$$

Попередній вираз — коваріаційна матриця перешкод або груба її оцінка, отримана в припущенні ергодичності випадкового процесу  $\tilde{\varepsilon}(k), k = \overline{1, m}$ , як матриця оцінок кореляційних функцій  $R_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau)$ :

$$Q_j = \begin{bmatrix} \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0) & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M) & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(M-1) & \dots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(0) \end{bmatrix},$$

$$\text{де } \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j\tilde{\varepsilon}_j}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{M-\tau} \sum_{k=1}^{M-\tau} \tilde{\varepsilon}_j(k)\tilde{\varepsilon}_j(k+\tau), & \tau \leq \tau_m; \\ 0, & \tau > \tau_m, \end{cases} \quad \tau_m \text{ — зсув, за якого}$$

оцінка  $\hat{R}(\tau)$  порівнянна з її похибкою.

У найпростішому випадку, якщо  $\tau_m = 1$ , то матриця  $Q$  діагональна.

*Другий компонент критерію (2.115)*

$$\begin{aligned} J_2 &= (\hat{\beta}(q) - \beta_a)^T P_a^{-1} (\hat{\beta}(q) - \beta_a) = \\ &= (\hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a)^T P_a^{-1} (\hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a) = \\ &= (\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_a(q-1))^T P_a^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}(q-1)), \end{aligned} \quad (2.117)$$

де  $\Delta\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}(q-1)$ ,  $\Delta\beta_a(q-1) = \beta_a - \hat{\beta}(q-1)$ ;  $P_a$  — коваріаційна матриця апіорних значень коефіцієнтів  $\beta_a$ .

За відсутності апіорної інформації про  $\beta_a$  значення  $P_a \rightarrow \infty$  і  $J_2 = 0$ ; для відомих меж  $\beta_{ia \max}, \beta_{ia \min}$  компонентів вектора  $\beta_a$  матриці  $P_a$  може здаватися діагональною. При цьому елементи  $P_{ia}$  діагоналі  $P_a$ , задаються з точністю до параметра  $\alpha_1$ :

$$P_{ia} = \alpha_1^2 |\beta_{ia \max} - \beta_{ia \min}|^2, \alpha_1 \approx 0,3 \div 1.$$

*Третій компонент критерію (2.115)*

$$J_3 = (\Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1))^T P_{\text{апос}}^{-1} (\Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1)), \quad (2.118)$$

де  $\Delta \hat{\beta}_{\text{апос}}(q-1) = \hat{\beta}(q-1) - \hat{\beta}_{\text{апос}}$ ;  $\hat{\beta}_{\text{апос}}$  — апостеріорна оцінка  $\beta$ , отримана з попереднього обчислення, якщо при обробці конкретної вибірки даних враховуються, результати, отримані з інших вибірок;  $P_{\text{апос}}$  — коваріаційна матриця апостеріорних оцінок чи, в найпростішому випадку, апроксимація її діагональною матрицею з елементами  $P_{\text{апос}} = \hat{\sigma}_{\beta_{\text{апос}}}^2$ , де  $\sigma_{\beta_{\text{апос}}}^2$  обчислюють як розкид оцінок  $\hat{\beta}_i$ , отриманих для різноманітних вибірок даних.

*Четвертий компонент критерію (2.115)*

$$J_4 = \Delta \hat{\beta}^T(q) \lambda^{-1} \Delta \hat{\beta}(q), \quad (2.119)$$

де  $\lambda$  — зазвичай діагональна матриця регуляризованих коефіцієнтів  $\alpha_2$ .

Якщо  $\alpha_a \rightarrow \infty$ , матриця  $\|\lambda^{-1}\| \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \hat{\beta}(q) \rightarrow \infty$  і, навпаки, якщо  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  матриця  $\lambda^{-1} \rightarrow \infty$  і компонент  $J_4$  не впливає на значення  $\Delta \hat{\beta}(q)$  на  $q$ -му кроці релаксійного процесу.

Гرادієнт функції (2.115)

$$\partial J(\hat{\beta}(q-1)) / \partial \Delta \hat{\beta} = \sum_{p=1}^4 \partial J_p / \partial \Delta \hat{\beta}. \quad (2.120)$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \partial J_1 / \partial \Delta \hat{\beta} &= -2 \sum_{j=1}^m (\partial e_j / \partial (\Delta \hat{\beta})^T)^T Q_j^{-1} e_j = \\ &= -2 \sum_{j=1}^m (\partial \varepsilon_j / \partial \Delta \hat{\beta}) Q_j^{-1} \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\partial J_2 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2P_a^{-1} (\Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \beta_a(q-1)); \quad (2.122)$$

$$\partial J_3 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2P_{\text{анос}}^{-1} (\Delta \hat{\beta}(q) - \Delta \beta_{\text{анос}}(q-1)); \quad (2.123)$$

$$\partial J_4 / \partial \Delta \hat{\beta} = 2\lambda^{-1} (\Delta \hat{\beta}(q) - 0). \quad (2.124)$$

З умови рівності нулю (2.120), враховуючи (2.116), (5.441)–(2.124). отримаємо систему нормальних рівнянь відносно вектора  $\Delta \hat{\beta}(q)$  невідомих приростів вектора  $\hat{\beta}(q-1)$  на  $q$ -му кроці ітерації:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial (\Delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{анос}}^{-1} + \lambda^{-1} \right) \Delta \hat{\beta}(q) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \epsilon_j + P_a^{-1} \Delta \beta_a(q-1) + P_{\text{анос}}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{\text{анос}}(q-1). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Перед тим як розв'язувати систему (2.125), введемо параметр  $\alpha_3$ , який покращить збіжність для неквадратичного функціонала (2.115):

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial (\Delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{анос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right) \Delta \hat{\beta}(q) = \\ &= \alpha_3 \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \epsilon_j + P_a^{-1} \Delta \beta_a(q-1) + P_{\text{анос}}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{\text{анос}}(q-1). \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\beta}(q) &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial (\Delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{\text{анос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \times \\ &\times \left( \alpha_3 \sum_{j=1}^m \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \epsilon_j + P_a^{-1} \Delta \beta_a(q-1) + P_{\text{анос}}^{-1} \Delta \hat{\beta}_{\text{анос}}(q-1) \right), \end{aligned} \quad (2.126)$$

тоді

$$\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q-1) + \Delta \hat{\beta}(q), \quad (2.127)$$

де  $\alpha_3 \in [1, \infty]$ .

Алгоритм (2.126), (2.127) узагальнює низку методів:

– для точно заданих  $Q_j^{-1}, P_a^{-1}, P_{\text{апоc}}^{-1}, \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 = 1$  та гаусівських щільностей розподілу  $\tilde{\epsilon}, \hat{\beta}_a, \hat{\beta}_{\text{апоc}}$ , він відповідає байєсівському;

– для  $P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 = 1$  і точно заданої  $Q_j^{-1}$  — марковському;

– для  $Q_j^{-1} = E, P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 = 1$  — методу Гаусса–Ньютона;

– для  $P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = 0$  — регуляризації Тихонова; для великих  $\lambda^{-1}$  і  $\alpha_3$  — градієнтному, для середніх — методу Маркварда [7].

Зміщення оцінки (2.127)

$$M\{\delta\hat{\beta}(q)\} = \lim_{q \rightarrow \infty} \hat{\beta}(q) - \beta$$

залежить від того, чи збігається послідовність (2.127) і чи досягнуто при  $\hat{\beta}(q) - \beta$  стаціонарної точки  $J^*$ , яка відповідає необхідній умові оптимальності

$$\partial J^* / \partial \Delta \hat{\beta} = 0. \quad (2.128)$$

Вибором параметра  $\alpha_3$  можна гарантувати збіжність за функціоналом  $J(\hat{\beta})$  до стаціонарної точки  $J^*(\hat{\beta})$ , у якій справедлива умова (2.128).

Математичне сподівання для (2.127) як середнє за множиною кінцевих реалізацій для нескінченного числа  $q$  кроків, з врахуванням (2.121)–(2.124), дорівнює:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m M \left\{ \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} e_j \right\} + P_a^{-1} (\hat{\beta}(\infty) - \beta_a) + \\ + P_{\text{апоc}}^{-1} (\hat{\beta}(\infty) - \hat{\beta}_{\text{апоc}}) = 0, \end{aligned} \quad (2.129)$$

де згідно з формулою (2.116),

$$\begin{aligned}
M \left\{ \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \epsilon_j \right\} &= M \left\{ \left( -\frac{\partial \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} \right) Q_j^{-1} (y_j - \hat{y}_j(\hat{\beta}(\infty))) \right\} = \\
&= -M \left\{ \frac{\partial \hat{y}_j(\beta(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} y_j \right\} + M \left\{ \frac{\partial \hat{y}_j(\beta(\infty))}{\partial \Delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \hat{y}_j(\beta(\infty)) \right\}.
\end{aligned} \quad (2.130)$$

Оскільки

$$\hat{y}_j = \hat{y}_j(\beta(\infty, x + N, t)), \quad y_j = f_j(\beta, x^*, t) + \tilde{\epsilon}_j,$$

то для того щоб рівняння (2.130) було близьке до нуля, необхідно в моделі замість  $x + N$  мати  $x^*$  або його оцінку  $\hat{x}^*$ , близьку до  $x^*$ .

Із рівняння (2.129) очевидна й інша причина зміщення, яка полягає в тому, що для  $\beta_a \neq \beta$ ,  $\hat{\beta}_{\text{апоc}} \neq \beta$ ,  $M < \infty$ ,  $P_a^{-1} > 0$ ,  $P_{\text{апоc}}^{-1} > 0$ ,  $\frac{\partial \epsilon_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \epsilon_j < \infty$  з'являється додаткове зміщення від неточно-го завдання  $\beta_a$  і  $\hat{\beta}_{\text{апоc}}$ .

Коваріація оцінки (2.127) може бути визначена наближено. У точці (2.128) дамо невелику варіацію  $\tilde{\epsilon}$  величини  $\hat{y}$ , яка приведе до варіації  $\partial \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$ . Тоді умова (2.128) справедлива для  $\hat{\beta}^* + \partial \hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial J(\hat{\beta}^* + \delta \hat{\beta}, y^* + \tilde{\epsilon})}{\partial \delta \hat{\beta}} \approx \frac{\partial J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta}} + \\
&+ \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \delta \hat{\beta} + \dots + \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\epsilon_j)^T} \tilde{\epsilon}_j, \\
\text{де } \frac{\partial J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta}} &= 0, \quad \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} = \left[ \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta}_i \partial \delta \hat{\beta}_j} \right]_{i,j=1}^n; \\
\frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\tilde{\epsilon}_j)^T} &= \left[ \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta}_i \partial \tilde{\epsilon}_j(k)} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, M}}; \quad \tilde{\epsilon}_j^T = (\tilde{\epsilon}_j(1), \dots, \tilde{\epsilon}_j(M)).
\end{aligned} \quad (2.131)$$

Із умови (2.131) визначимо

$$\partial \hat{\beta} = - \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 J(\hat{\beta}^*, y^*)}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\epsilon_j)^T} \tilde{\epsilon}_j, \quad (2.132)$$

де згідно з рівняннями (2.115)–(2.126),

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{анос}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1}; \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \cdot \partial (\tilde{\epsilon}_j)^T} = \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1}, \quad l=1, \bar{m}. \quad (2.134)$$

Вважаючи, що вираз (2.133), рівняння (2.134) є детермінованими і вважаючи відсутність кореляції між  $\tilde{\epsilon}_j$  і  $\tilde{\epsilon}_i$  ( $i \neq j; i, j = 1, \bar{m}$ ), одержуємо коваріацію оцінки (2.132):

$$\begin{aligned} \text{cov}[\delta \hat{\beta}] &= M \{ \delta \hat{\beta} (\delta \hat{\beta})^T \} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right)^{-1} \left[ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\tilde{\epsilon}_j)^T} \right) Q_j^* \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\tilde{\epsilon}_j)^T} \right)^T \right] \times \\ &\quad \times \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta \hat{\beta} \partial (\delta \hat{\beta})^T} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

де  $Q_j^*$  — коваріаційна матриця похибки  $\tilde{\epsilon}_j(k)$ .

Підставивши вирази (2.133), (2.134) в рівняння (2.135), знайдемо

$$\begin{aligned} \text{cov}[\delta \hat{\beta}] &= \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{\beta}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + P_a^{-1} + P_{анос}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} Q_j^* Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} \right) \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} + \right. \\ &\quad \left. + P_a^{-1} + P_{анос}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Вираз (2.136) залежність від значень  $Q_j^*, Q_j, P_a, P_{\text{апоc}}, a_3, \lambda$  визначає коваріацію байєсівських оцінок ( $\lambda^{-1} = 0, Q_j = Q_j^*$ ), марковських ( $P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, Q_j = Q_j^*$ ), Гаусса–Ньютона ( $Q_j = 1, P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$ ), Тихонова ( $P_a^{-1} = P_{\text{апоc}}^{-1} = 0$ ), градієнтних ( $\lambda^{-1} \rightarrow \infty, a_3 \rightarrow 0$ ).

Збіжність оцінок узагальненого алгоритму (2.126), (2.127) залежить від апіорних і апостеріорних оцінок  $\beta_a$  і  $\hat{\beta}_{\text{апоc}}$ , від регулюючого додатку  $a_3 \lambda^{-1}$ , від матриць  $Q_j$  і особливо від вигляду функції  $J_1$  (2.116).

Для строго випуклої квадратичної за  $\beta$  поверхні  $J$  оцінка  $\hat{\beta}$  сходиться (якщо  $\alpha_3 = 0$ ) до оптимальної точки за один крок, так як вираз (2.117) точний.

У решті випадків збіжність може бути покращена за рахунок покращення числа обумовленості матриць.

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta \hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta \hat{\beta})^T} \quad (2.137)$$

і адаптації параметра  $\alpha_3$ .

Покращення обумовленості досягається плануванням експерименту, який ортогоналізує компоненти  $\partial \hat{y}_j / \partial \delta \beta_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ , або (для достатньо інформативних вибірок) таким спеціальним «зважуванням» даних, яке частково ортогоналізує компоненти  $\partial \hat{y}_j / \partial \delta \beta_j$ , наприклад, введенням в вираз (2.137) порядково в кожен рядок вагових функцій

$$\eta_{ij}(k) = n \left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \delta \beta_i} \right|^{\alpha_4} / \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \hat{y}_j(k)}{\partial \delta \beta_i} \right|^{\alpha_4}, \eta_{ij} \in [0, 1],$$

які для  $\alpha_4 = 0$  не вносять змін, якщо  $\alpha_4 > 0$  виділяють ті точки  $k$ , у яких амплітуда діагонального елемента  $i$ -го рядка (при оцінці  $\beta_i$ ) більша від амплітуди решти компонентів.



Для великих  $\alpha_4$  різко зростає вага ортогональних векторів, для яких значення  $\eta_{ij}(k)$  прямує до одиниці. Це призводить до ортогоналізації (2.137), що збільшує обумовленість і зменшує коваріацію оцінок  $\hat{\beta}$ .

Разом з тим «збіднення» вибірки внаслідок нерівномірного зважування повинно призвести до збільшення коваріації  $\hat{\beta}$ . Для обмежених вибірок оптимальне  $\alpha_4^*$  може бути нульовим, зі збільшенням числа  $M$  (довжина вибірки)  $\alpha_4^*$  зміщується в бік більших значень.

Параметр  $\alpha_3$  для неквадратичних унімодальних по-верхонь підбирають із умови забезпечення строго релаксаційного процесу  $\hat{\beta}(q)$ , який задовольняє вимогу сходження по  $J$ .

Задаючи матриці  $Q_j, P_a, P_{\text{апоc}}, \lambda$  і параметри  $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$ , з універсального методу можна отримати його оптимальну для конкретних умов різновидність.

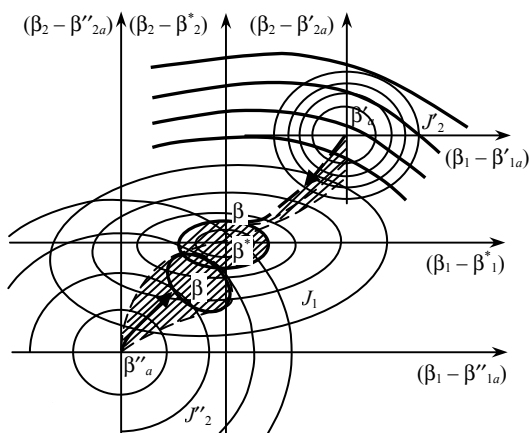
Проілюструємо вплив неортогональності компонента градієнта показника  $J$  і неточності завдання функції  $J(\Delta\beta)$  на якість оцінок  $\beta$ .

Припустимо, що оцінюється двовимірний вектор  $\beta$  у рівнянні  $y = \beta^T x$  за двома компонентами  $J_1$  і  $J_2$  квадратичного за  $\Delta\beta$  показника (2.115) (рис. 2.1, 2.2).

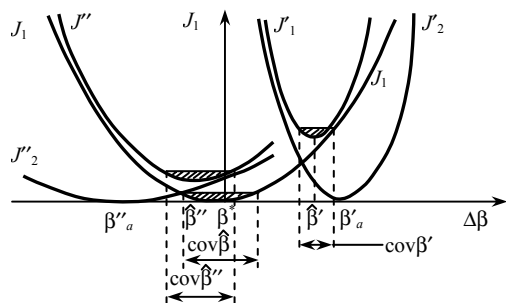
На рис. 2.1 побудовано лінії рівняння  $J_1$  і  $J_2$  для двох різних апіорних значень  $\beta'_a, \beta''_a$  і ваг  $P_a^{-1}$  ( $J'_2$  має більшу вагу, ніж  $J''_2$ ). Змінні  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  ортогональні (осі еліпса  $J_1$  збігаються з осями  $(\beta_i - \beta_i^*), i = 1, 2$ ).

Оскільки вихідна інформація зашумлена, то функціонали  $J_1$ , обчислюють із точністю до величини  $\delta J_1$ .

Лінія рівня  $\delta J_1$  визначає область невизначеності (заштрихована область), яка вміщує коваріації оцінок  $\text{cov}[\beta]$ .



a



b

Рис. 2.1. Поверхні строговипуклих функціоналів  $Y_1, Y_2$  і траєкторії налаштування  $\hat{\beta}(t)$ , коли компоненти  $\partial Y_1 / \partial \hat{\beta}$  і  $\partial Y_2 / \partial \hat{\beta}$ , ортогональні (a) і перетин (б) цих функціоналів по траєкторії  $\hat{\beta}(t)$

Область невизначеності одного  $J_1$  більша, ніж для  $J_1 + J_2$ , причому

$$\text{cov}[\hat{\beta}''] < \text{cov}[\hat{\beta}'] < \text{cov}[\hat{\beta}],$$

де  $\text{cov}[\hat{\beta}]$ ,  $\text{cov}[\hat{\beta}']$ ,  $\text{cov}[\hat{\beta}'']$  — коваріації оцінок, отриманих із умов мінімуму  $J_1$ ,  $J_1 + J_2'$ ,  $J_1 + J_2''$  відповідно.

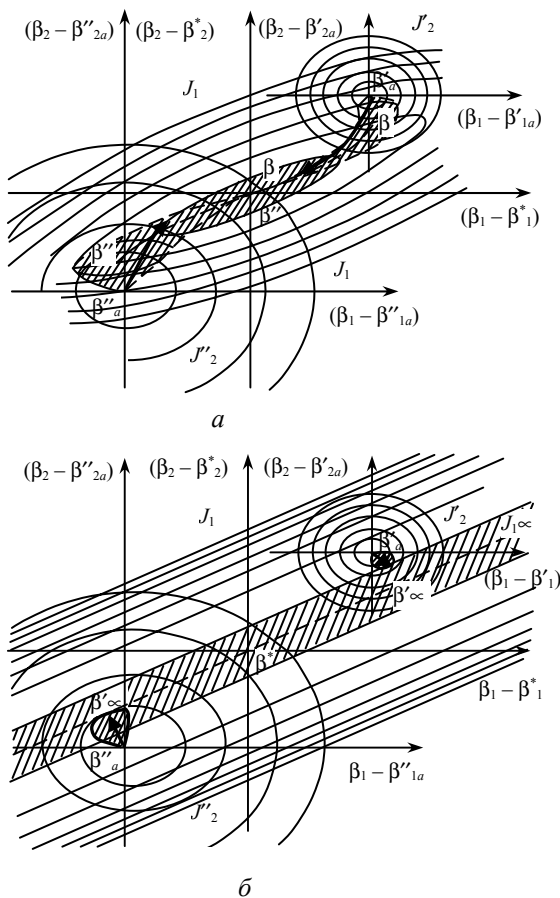


Рис. 2.2. Поверхні функціоналів  $J_1, J_2$  і траєкторії налаштувань  $\hat{\beta}(t)$ , коли компоненти  $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_1$  і  $\partial J_1 / \partial \hat{\beta}_2$  :  
 $a$  — ортогональні;  $б$  — лінійно залежні

Зміщення оцінок розподілені у зворотному порядку

$$\delta \hat{\beta}'' > \delta \hat{\beta}' > \delta \hat{\beta} = 0.$$

Що більша вага  $P_a^{-1}$  регуляризуючого додатка (для неточного  $\beta_a$ ), тим більше зміщення.

Як видно, для ортогональних  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  оцінки  $\hat{\beta}'$  і  $\hat{\beta}''$ , одержані за вибіркою довжини  $M$ , все ж ближчі до істинної  $\beta^*$ .

Пунктиром показано, що якщо  $M \rightarrow \infty$ , то області невизначеності стягуються в точку, а оцінки  $\hat{\beta}'_\infty$  і  $\hat{\beta}''_\infty$  прямують до істинного  $\beta^*$ .

Для кінцевих  $M$  оцінки  $\hat{\beta}'$  і  $\hat{\beta}''$  будуть гіршими, ніж оцінка  $\hat{\beta}$ , отримана лише за показником  $J_1$ , якщо точка  $\beta_a$  не належить області невизначеності.

На рис. 2.1, б подано перетин показників за траєкторією руху  $\beta''_a \rightarrow \beta^* \rightarrow \beta'_a$ . Із рис. 2.2, а видно, що збільшення ваги  $J'_2$  порівняно з  $J''_2$  приводить до зростання зміщення і зменшення коваріаційних оцінок.

Це випадок, коли  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  не ортогональні, але лінійно незалежні. Еліпс показника  $J_1$  повернутий відносно осей  $\beta_i - \beta_i^*$ . Довжина головної діагоналі залежить від взаємозв'язку  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$ .

На відміну від попередніх рисунків, тут для остаточного значення  $M$  уточнюються тільки компоненти  $\hat{\beta}_1$  вектора  $\hat{\beta}$ , а оцінка  $\hat{\beta}_2$  погіршується (її зміщення стає більшим від апіорного).

На рис. 2.2, б наведено випадок, для якого  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  лінійно залежні. На відміну від попереднього, тут навіть у асимптотиці (при  $M \rightarrow \infty$ ) оцінки  $\hat{\beta}'_\infty$  і  $\hat{\beta}''_\infty$  не збігаються з  $\beta^*$ . Нарешті, якщо залежність  $y(\beta)$  — нелінійна (функція Розенброка), то можлива ситуація (рис. 2.3), за якої обидві оцінки  $\hat{\beta}'_\infty$  і  $\hat{\beta}''_\infty$  через неправильну апіорну інформацію про  $\beta_a$  і не випуклість функціоналу  $J(\beta)$  не уточнюватимуться:

$$(\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty)(\text{cov} \hat{\beta})^{-1}(\hat{\beta} - \hat{\beta}_\infty) \leq \delta J. \quad (2.138)$$

У таких випадках доцільно збільшити компонент  $a_3 \lambda^{-1}$  алгоритму (2.126), (2.127), спростивши його до градієнтного.

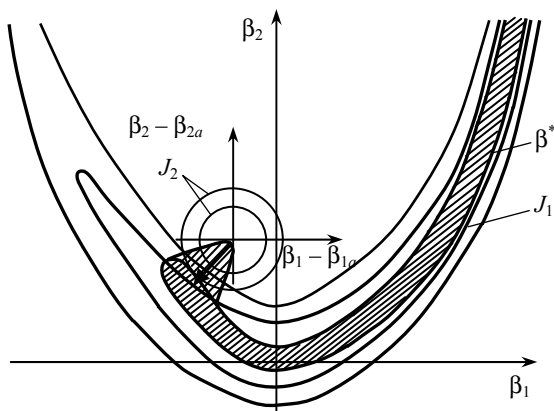


Рис. 2.3. Поверхня невикуклого ( $J_1$  — функція Розенброка) і викуклого ( $J_2$  — функціоналів). Траскторія налаштування  $\hat{\beta}(t)$

Правильність задання апіорних і апостеріорних даних  $(\beta_a, P_a, P_{\text{апос}}, \beta_{\text{апос}})$  можна перевірити, зіставивши незміщені оцінки, отримані при  $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$  і їх коваріацію з оцінками для заданих  $P_a, P_{\text{апос}}, \lambda, \beta_a, \hat{\beta}_{\text{апос}}$ .

Якщо скористатися поняттям довірчих областей і взяти їх подібними областями невизначеності, то в припущенні нормальності розподілу оцінки  $\hat{\beta}$  з коваріацією  $\text{cov}\hat{\beta}$  і для заданої довірчої ймовірності  $\gamma$  значення  $\delta J$  визначається як верхній  $\gamma$ -квантиль розподілу  $X^2$ . Задавшись  $\gamma$ , а отже, і значенням  $\delta J$  і переходячи в (2.138) від нерівності до рівності, отримаємо поверхню спільної довірчої області (еліпсоїда). Побудуємо ці поверхні для незміщених оцінок  $\hat{\beta}(J_1)$  і  $\hat{\beta}(J_1, J_2)$  з врахуванням  $P_a, P_{\text{апос}}$ . Якщо область (2.138) значень оцінок  $\hat{\beta}(J_1)$  включає в себе область (2.138) для  $\hat{\beta}(J_1, J_2)$ , то виходять оцінки, які не поступаються оцінкам  $\hat{\beta}(J_1)$ , інакше апіорна й апостеріорна інформації задані неправильно і з імовірністю  $\gamma$  кращою виявляється оцінка  $\hat{\beta}(J_1)$ .

Показником оптимальності вектора  $\alpha$  параметрів алгоритму може бути об'єм області (2.138), що дорівнює

$$v(\delta J) = (\delta J \pi)^{n/2} \det^{1/2} \left( \text{cov}[\hat{\beta}] / \Gamma(n/2 + 1) \right),$$

де  $\Gamma$  — гамма-функція), або  $D$ -критерій, який дорівнює  $\det(\text{cov}[\hat{\beta}])$  [15].

Алгоритми нелінійного оцінювання дають оптимальні оцінки параметрів моделі ЕТО тільки за умови унімодальності показника  $J$  якості і статичної достовірності матриці  $Q$  коваріацій похибки  $\epsilon$ . Для цього необхідно мати великі вибірки даних експерименту на ЕТО.

### 2.3. Рекурентні методи ідентифікації дискретних моделей ЕТО

#### 2.3.1. Ідентифікація дискретних моделей динаміки ЕТО методом найменших квадратів

Параметрична ідентифікація дозволяє знаходити значення коефіцієнтів моделі за вимірювальним значенням керованого  $y$  і керуючого  $u$  сигналів ЕТО. Передбачається, що структура й порядок моделі об'єкта відомі. Вимірювальні значення  $y$  і  $u$  представляються у вигляді часового ряду, тому оцінюються параметри авторегресії ковзного середнього АРКС-моделі об'єкта, або параметри його дискретної передатної функції. За коефіцієнтами АРКС-моделі і її структурою за необхідності можна перейти до неперервної моделі ЕТО [7].

Підставимо у рівняння АРКС-моделі значення сигналів  $y(k)$  і  $u(k)$ , а також оцінки параметрів об'єкта, отримані після  $(k-1)$ -го такту:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) - b_1 y(k-d-1) - \dots - b_m y(k-d-m) = e(k).$$

Змінна похибка  $e(k)$  відображає присутність похибки вимірювань виходу і неточність оцінок параметрів  $a_i$  і  $b_i$  моделі. По-значимо значення  $y(k)$  як значення  $y(k/k-1)$ , передбачене у момент  $(k-1)$  на момент  $k$ . Тоді

$$y(k/k-1) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + \\ + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m),$$

або

$$y(k/k-1) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1), \quad (2.139)$$

де  $\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$  — вектор оцінок параметрів;

$\Psi^T(k) \hat{\theta} = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)]$  — вектор даних;  $d$  — величина дискретного запізнення.

Похибка

$$e(k) = y(k) - y(k/k-1), \quad (2.140)$$

де  $y(k)$  — нове вимірювання;  $y(k/k-1)$  — передбачене за моделлю значення вимірювання.

Припустимо, що вимірювання виконано на інтервалі  $k = 1, 2, \dots, n+d+N$ , а порядок АРКС-моделі  $(n, m)$ . Тоді на основі (2.139) і (2.140) отримаємо векторно-матричне рівняння

$$y(k) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k-1) + e(k), \quad (2.141)$$

де  $y^T(k) = [y(n+d), y(n+d+1), \dots, y(n+d+N)]$  — вектор виходу;

$\Psi(k) =$

$$= \begin{bmatrix} -y(n+d-1) & \dots & -y(d) & u(n-1) & \dots u(0) \\ -y(n+d) & \dots & -y(d+1) & u(n) & \dots u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(m+d+N+1) & \dots & -y(n+d) & u(n+N-1) & \dots u(N) \end{bmatrix} \quad \text{—}$$

матриця даних;

$e^T(m+d+N) = [e(n+d), e(n+d+1), \dots, e(n+d+N)]$  — вектор похибок.

Функція втрат за критерієм найменших квадратів:

$$J = e^T (n+d+N) e(n+d+N) = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} e^2(k). \quad (2.142)$$

Її мінімум знаходиться з умови

$$dJ / d\theta = 0.$$

Припускаючи, що  $N \gg 2n$ , позначимо

$$P(n+d+N) = [\Psi^T(n+d+N) \Psi(n+d+N)]^{-1},$$

тоді оцінка, отримана шляхом мінімізації функції втрат (2.142), матиме вигляд:

$$\hat{\theta}(n+d+N) = P(n+d+N) \Psi^T(n+d+N) y(n+d+N). \quad (2.143)$$

Алгоритм (2.143) — нерекурентний, побудований за методом найменших квадратів, оскільки обчислення оцінок параметрів  $\hat{\theta}(n+d+N)$  моделі виконується лише після того як формується увесь масив вхідних та вихідних даних об'єкта  $\Psi(n+d+N)$ .

Рекурентний алгоритм МНК отримується після запису нової  $\hat{\theta}(k+1)$  і старої  $\hat{\theta}(k)$  оцінок і віднімання однієї з іншої:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k) [y(k+1) - \Psi^T(k+1) \hat{\theta}(k)]. \quad (2.144)$$

Вектор  $\gamma$  корекції визначається зі співвідношення:

$$\gamma(k) = \frac{P(k) \Psi(k+1)}{\Psi^T(k+1) P(k) \Psi(k+1) + I}. \quad (2.145)$$

Вектор  $P(k+1)$  на наступному кроці обчислюється як

$$P(k+1) = [I - \gamma(k) \Psi^T(k+1) P(k)]. \quad (2.146)$$

*Алгоритм рекурентного методу найменших квадратів:*

1. Задаються початкові значення вектора оцінок параметрів моделі і вектора даних:

$$\hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I,$$

де  $\alpha \gg 1$ ,  $I$  — одинична матриця відповідної розмірності.



2. Виконується вимірювання вхідного і вихідного сигналів об'єкта і формується новий вектор даних  $\psi(k+1)$ .

3. Обчислюється вектор (2.145) корекції  $\gamma(k)$ .

4. Знаходиться нова оцінка (2.144) параметрів  $\theta(k+1)$ .

5. Обчислюється новий вектор  $P(k+1)$  за формулою (2.146).

Зазвичай має місце корельованість у часі шумів  $e(k)$ . Як було показано, використання звичайного МНК викликає зміщення оцінок параметрів. Погіршення цих оцінок призводить до погіршення оцінок змінних станів  $x(k)$  моделі.

Для отримання незміщених оцінок використовується узагальнений МНК (УМНК), за якого оцінюються параметри моделей об'єкта і шуму на виході. Ідентифікації підлягає модель максимальної правдоподібності (МП—модель), для якої зв'язок між змінними задається рівнянням

$$A(z)y(z) - B(z)z^{-d}u(z) = D(z)e(z). \quad (2.147)$$

Введемо розширені вектори даних і параметрів

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^T(k) = & y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, \\ & \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Тоді вихідний сигнал об'єкта можна записати через (2.148) і (2.141):

$$y(k) = \hat{\psi}^T(k) \hat{\theta}(k-1). \quad (2.149)$$

Оцінка параметрів МП-моделі обчислюються аналогічно МНК за формулами (2.144)–(2.148).

### ***2.3.2. Ідентифікація методом допоміжних змінних***

Метод допоміжних змінних (МДЗ) використовується, коли існує кореляція між сигналом шуму  $e(k)$  та елементами вектора даних  $\hat{\psi}^T(k+1)$ . Модель об'єкта і шум представлені у вигляді повної моделі:

$$y(z) = \frac{D(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{C(z)} e(z), \quad (2.150)$$

де  $z^{-d}$  — враховує можливе запізнення на  $d$  кроків  $\Delta t$ .

Алгоритм ідентифікації за методом допоміжних змінних подібний до алгоритму МНК. Тільки для реалізації алгоритму вводять вектор допоміжних змінних

$$H^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)], \quad (2.151)$$

у яких використовуються вихідні сигнали  $h(k)$  допоміжної моделі з параметрами  $\hat{\theta}_b(k)$

$$h(k) = H^T(k) \hat{\theta}_b(k). \quad (2.152)$$

Для зменшення ступеня кореляції між допоміжними змінними й помилкою, параметри допоміжної моделі визначаються як вихід низькочастотного дискретного фільтра першого порядку з запізненням  $\eta$ , на вхід якого подається оцінка параметрів об'єкта

$$\hat{\theta}_b(k) = (1-\beta) \hat{\theta}_b(k-1) + \beta \hat{\theta}(k-\eta), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1. \quad (2.153)$$

Вектор корекції

$$\gamma(k) = \frac{P(k) \varphi(k+1)}{\psi^T(k+1) P(k) \varphi(k+1) + 1}, \quad (2.154)$$

нове значення вектора  $P(k+1)$

$$P(k+1) = [I - \gamma(k) \varphi^T(k+1) P(k)]. \quad (2.155)$$

Оцінки вектора параметрів обчислюються за формулою (2.144). На початковому рівні метод чутливий до вибору вихідних значень  $\hat{\theta}(0)$  і  $P(0)$ , а також коефіцієнта  $\beta$  фільтра (2.153). Для підвищення стійкості алгоритму на початку доцільно скористатися звичайним МНК.

МДЗ дозволяє обчислити лише оцінки параметрів об'єкта, якщо для оцінки параметрів моделі формуючого фільтра шуму

можливо використати МНК. Модель шуму представлена стаціонарним авторегресійним процесом із ковзним середнім

$$\begin{aligned} y(k) + c_1 y(k-1) + \dots + c_p y(k-p) = \\ = v(k) + d_1 v(k-1) + \dots + d_p v(k-p). \end{aligned} \quad (2.156)$$

Введемо вектор даних

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), v(k-1), \dots, v(k-p)], \quad (2.157)$$

і вектор параметрів

$$\rho^T [c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_p], \quad (2.158)$$

записуємо (2.156) у вигляді векторно-матричного рівняння аналогічного МНК

$$y(k) = \varphi^T(k) \rho(k-1) + v(k). \quad (2.159)$$

Щоб використати алгоритм МНК до АРКС, моделі невідомих перешкод замінюються їх оцінками. Із рівняння (2.159) маємо

$$v(k) = y(k) - \hat{\varphi}^T(k) \hat{\rho}(k-1), \quad (2.160)$$

де

$$\hat{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-p), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-p)]. \quad (2.161)$$

Після цього обчислюється нова оцінка вектора даних

$$\varphi^T(k+1) = [-y(k), \dots, -y(k-p+1), \hat{v}(k), \dots, \hat{v}(k-p+1)]. \quad (2.162)$$

Як початкові значення беруться

$$\hat{v}(0) = 0; \hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \alpha \gg 1. \quad (2.163)$$

### ***2.3.3. Ідентифікація дискретних моделей динаміки ЕТО методом максимальної правдоподібності***

Похибка ідентифікації  $e(k)$  становить собою дискретну випадкову величину  $E$ , яка залежить від вектора параметрів  $\Theta$  АРКС-моделі. Нехай у результаті проведення вимірювань отримано вибірку випадкової величини  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  об'ємом  $n$ . Позначимо ймовірність появи якого-небудь числа вибірки  $P(E = e_j)$  через

$p_i(\theta)$ , а через  $f_1, f_2, \dots, f_r$  абсолютні частоти, з якими з'являються значення  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  у вибірці, причому  $\left( \sum_{j=1}^r f_j = n \right)$ . У цьому випадку функцією правдоподібності називають функцію параметрів моделі, яка визначається співвідношенням [14]

$$L(x_1, x_2, \dots, x_l; \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \dots p_r^{f_r}(\theta). \quad (2.164)$$

Метод максимальної правдоподібності (ММП) полягає в тому, що як оцінки параметрів  $\Theta$  беруться такі їх значення, за яких функція правдоподібності досягає свого максимуму. Це значення

$$\theta_{\max} = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l) \quad (2.164).$$

Відповідна функція вибірки  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l)$  називається найбільше правдоподібною оцінкою  $\theta$ . Її отримують при розв'язанні системи рівнянь:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0, \quad (2.165)$$

або

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.166)$$

Максимально правдоподібні оцінки за достатньо загальних умов є незалежними та асимптотично-нормально розподіленими (але не завжди незміщені), і мають серед всіх асимптотично-нормально розподілених оцінок найбільшу ефективність.

Щоб записати вираз для функції правдоподібності  $L(x_1, x_2, \dots, x_l; \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \dots p_r^{f_r}(\theta)$ , треба знати аналітичний вираз закону розподілення. Часто вважається, що адитивні перешкоди у рівнянні моделі розподілені нормально. У цьому випадку оцінки ММП для лінійних моделей із незалежним шумом збігаються з оцінками МНК, а метод максимальної правдоподібності дає такий же вираз для функції втрат, що й метод найменших квадратів:

$$L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (2.167)$$

Оскільки до функції правдоподібності (функції втрат) параметри моделі входять нелінійно, тому для їх оцінок необхідно мінімізувати функцію втрат, розв'язавши систему нелінійних алгебричних рівнянь. Оскільки результати отриманого розв'язання є функцією вибірки (2.161), метод максимальної правдоподібності може реалізовуватися лише у рекурентному вигляді.

Але якщо провести лінеаризацію функції правдоподібності в малому, а потім її мінімізувати, можна отримати рекурентний алгоритм:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \quad (2.168)$$

де

$$\gamma(k) = P(k+1)\phi(k+1) = \frac{P(k)\phi(k+1)}{1 + \phi^T(k+1)P(k)\phi(k+1)}, \quad (2.169)$$

$$P(k) = \frac{1}{\frac{\partial^2 L[\theta(k-1), k]}{\partial \theta^2}}, \quad (2.170)$$

$$P(k+1) = (I - \gamma(k)\phi^T(k+1))P(k), \quad (2.171)$$

$$P(k+1) = (I - \gamma(k)\phi^T(k+1))P(k), \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \phi^T(k+1) = \\ = \{(-y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots \\ \dots u'(k-d-n+1), e'(k), \dots, e'(k-n-1))\}, \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_1 y'(k-n), \quad (2.174)$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n), \quad (2.175)$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_1 e'(k-n), \quad (2.176)$$

$$e(k) = y(k) - \psi^T(k+1)\theta(k), \quad (2.177)$$

$$\hat{v}(k+1) = e(k+1). \quad (2.178)$$

Початкові значення параметрів  $\theta(0)=0$ ;  $P(0)=\alpha I$ ,  $\varphi(0)=0$ ,  $\alpha \gg 1$ . Вектор  $\psi(k+1)$  аналогічний вектору (2.148) в УМНК.

На відміну від УМНК у ММП використовується модифікований вектор даних  $\varphi(k+1)$ , як у методі допоміжної змінної. Але, на відміну від МДЗ, у ММП вектор даних корелює з шумами. Оцінки ММП асимптотично ефективні, нормально розподілені.

#### **2.3.4. Ідентифікація дискретних моделей методом стохастичної апроксимації**

Метод стохастичної апроксимації (МСА) розроблено для визначення коренів рівняння, якщо значення функції для заданого значення аргументу спостерігаються з похибкою.

Нехай, наприклад, у лінійному різницевому рівнянні (2.141) треба визначити вектор параметрів  $\theta$ . Під час кожного вимірювання дійсне значення  $y_0(k)$  не спостерігається, а спостерігається деяке значення  $y(k)$ , яке піддається дії перешкоди  $v(k)$ , про яку відомо, що

$$M[y(k)] = M[y_0(k)]. \quad (2.179)$$

МСА організує послідовність розв'язків для знаходження оцінки вектора параметрів при кожному вимірюванні  $\hat{\theta}(k)$ , таку, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta. \quad (2.180)$$

Члени цієї послідовності утворюються рекурентною формулою

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k) [y(k+1) - \psi^T(k+1)\theta(k)], \quad (2.181)$$

яка аналогічна формулі рекурентного МНК.

Відмінність полягає у векторі корекції  $\gamma(k)$ .

Доводиться, що, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty \text{ та } \sum_{k=1}^N \gamma^2(k) < \infty, \quad (2.182)$$

дисперсія перешкод  $\gamma(k)$  обмежена і модель об'єкта стійка, то виконується асимптотична умова (2.180) збігу  $\hat{\theta}(k)$  до  $\theta$ .

Вираз у квадратних дужках в рівняння (2.181) позначено  $e(k)$  і називається похибкою;  $\gamma(k)$  — коефіцієнт корекції.

Вектору параметрів  $\hat{\theta}(k)$  відповідає вектор похибок  $e(k) = [y(k+1) - \psi^T(k+1)\theta(k)]$  та матриця коефіцієнтів  $\gamma(k)$ .

Умовам (2.182) відповідає велика кількість послідовностей, наприклад,

$$\gamma(k) = \frac{c}{k}, \quad c = \text{const}. \quad (2.183)$$

Метод стохастичної апроксимації легко переноситься на задачі визначення параметрів у стохастичних системах в умовах послідовного отримання оцінок (рекурентна ідентифікація). Нехай рівняння моделі задано у вигляді (2.141),  $M[e(k)] = 0$ , та функція втрат (2.142) подана у вигляді:

$$J = e^T(N)e(N) = \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (2.184)$$

Тоді

$$e(k+1) = \frac{dJ}{d\theta}(\theta - \hat{\theta}). \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \gamma(k+1)\psi^T(k+1) \times \\ &\times [\gamma(k+1) - \psi^T(k+1)\theta(k)]. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Необхідно відзначити, що математичне сподівання вектора похибки у точці  $\theta = \hat{\theta}$  на кожному кроці дорівнюватиме нулю.

Коефіцієнт корекції:

$$\gamma(k+1) = \frac{c}{k+1}. \quad (2.187)$$

Недолік МСА — повільний збіг оцінок  $\hat{\theta}(k)$ , навіть якщо дисперсія  $e(k)$  істотно менше дисперсії  $y(k)$ .

Попри повільний збіг оцінок, алгоритми МСА за своєї простоти знаходять застосування в практичних задачах ідентифікації лінійних та нелінійних моделей ЕТО із незалежним адитивним шумом.

### 2.3.5. Порівняння характеристик рекурентних методів ідентифікації динаміки ЕТО

Подані вище алгоритми рекурентної ідентифікації (РМНК, РУМНК, РМДЗ, РММП, МСА) можуть бути приведені до єдиної форми [15]:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \quad (2.188)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1)P(k)\varphi(k+1), \quad (2.189)$$

$$e(k+1) = y(k+1) - \psi^T(k+1)\theta(k). \quad (2.190)$$

Для різних методів їх описання лише відрізняється векторами  $\hat{\theta}(k)$ ,  $\psi(k+1)$  та  $\gamma(k)$ . Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК):

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m], \quad (2.191)$$

$$\begin{aligned} \psi^T(k) = \\ = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)], \end{aligned} \quad (2.192)$$

$$\mu(k+1) = 1 / \left( 1 + \psi^T(k+1)P(k)\psi(k+1) \right), \quad (2.193)$$

$$P(k) = 1 / \left[ \psi^T(k)\psi(k) \right], \quad (2.194)$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\psi^T(k+1)P(k), \quad (2.195)$$

$$\varphi(k+1) = \psi(k+1), \quad (2.196)$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \quad \alpha \gg 1. \quad (2.197)$$

Узагальнений рекурентний метод найменших квадратів (УРМНК):

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n], \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} \psi^T(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots \\ \dots u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)], \end{aligned} \quad (2.199)$$



$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)P(k)(k+1)}, \quad (2.200)$$

$$P(k) = 1 / [\Psi^T(k)\Psi(k)], \quad (2.201)$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\Psi^T(k+1)P(k), \quad (2.202)$$

$$\Phi(k+1) = \Psi(k+1), \quad (2.203)$$

$$\theta(x, t) \big|_{t=0} = \theta_{s,v} \big|_{v=0} = \theta_{s,0} \cdot \alpha \gg 1. \quad (2.204)$$

Рекурентний метод допоміжних змінних (РМДЗ):

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m], \quad (2.205)$$

$$\begin{aligned} \Psi^T(k) = \\ = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)], \end{aligned} \quad (2.206)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T(k) = \\ = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)], \end{aligned} \quad (2.207)$$

$$h(k) = \Phi^T(k)\theta_b(k), \quad (2.208)$$

$$\hat{\theta}_b(k) = (1-\beta)\hat{\theta}_b(k-1) + \beta\hat{\theta}(k-\eta), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1, \quad (2.209)$$

$$\mu(k+1) = 1 / (1 + \Psi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)), \quad (2.210)$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\Phi^T(k+1)P(k), \quad (2.211)$$

$$\hat{v}(0) = y(0); \hat{\theta}(0) = 0; P(0) = \alpha I, \quad \alpha \gg 1. \quad (2.212)$$

Рекурентний метод максимальної правдоподібності (РММП):

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_n], \quad (2.213)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T(k+1) = & -y'(k), \dots, -y'(k-n+1), u'(k-d), \dots, u'(k-d-n+1), \\ & e'(k), \dots, e'(k-n-1), \end{aligned}$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_n y'(k-n),$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n), \quad (2.214)$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n),$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \psi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}, \quad (2.215)$$

$$P(k+1) = I - \gamma(k)\varphi^T(k+1)P(k), \quad (2.216)$$

$$\varphi(0) = 0; \quad \theta(0) = 0; \quad P(0) = \alpha I, \quad \alpha \gg 1.$$

Метод стохастичної апроксимації (МСА)

$$\hat{\theta}(k-1) = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m], \quad (2.217)$$

$$\psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)],$$

$$\mu(k+1) = 1,$$

$$P(k+1) = \frac{c}{k+1}, \quad (2.218)$$

$$\varphi(k+1) = \psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; \quad P(0) = \alpha I, \quad \alpha \gg 1.$$

Якщо параметри об'єкта на інтервалі вимірювань  $k = 0 \dots N$  залишались постійними, то вимірювання  $u(k)$ ,  $y(k)$  та похибки  $e(k)$  входять з однаковою вагою, незалежною від  $k$ .

Якщо оцінюються параметри нестационарного об'єкта, то новим вимірюванням потрібно надавати більшу вагу, ніж тим, що були раніше.

З цього випливає, що повинен бути передбачений механізм забування старих значень.

У МНК він може бути введений шляхом зміни функції втрат (метод експоненціально зважених найменших квадратів):

$$J = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} w(k) e^2(k), \quad (2.219)$$

де  $w(k) = \lambda^{n+d+N-k}$   $0 < \lambda < 1$ .

У зв'язку з цим формули рекурентних методів (2.188)–(2.218) необхідно змінити: у знаменнику  $\mu(k+1)$  одиниця замінюється на  $\lambda$ , а матриця  $P(k+1)$  перемножується на  $1/\lambda$ .

Задаючись показником згасання  $\lambda$ , доводиться вибирати між високим ступенем заглушування шуму  $\lambda$ , близьким до 1, та кращим відслідковуванням параметрів, що змінюються  $\lambda$ , менше 1.

Результати дослідів рекурентних алгоритмів дозволяють зробити висновки про умови їх використання.

РМНК застосовують для малих відношень інтенсивностей шуму та корисного сигналу. В іншому випадку він дає сильне зміщення оцінок параметрів. Надійна збіжність оцінок вимагає відносно невеликого обсягу обчислень.

Щодо УРМНК, то якщо справедлива модель шуму  $D/A$ , він застосовується при більш високих відношеннях шуму до сигналу. Спочатку оцінки сходяться повільно або навіть розходяться. Оцінки фільтра шуму  $D = [d_1, \dots, d_m]$  сходяться повільніше від оцінок параметрів об'єкта. Він потребує більшого обсягу обчислень, ніж РМНК.

РМДЗ забезпечує достатньо точну оцінку параметрів. Використовується для високих інтенсивностей перешкод та їх кореляції зі змінними об'єкта. Для збігу оцінок на початковому етапі рекомендується використовувати РМНК. Він має досить великий обсяг обчислень.

Щодо РММП, то якщо справедлива модель шуму вигляду  $D/A$ , він забезпечує високу точність оцінок. Спочатку оцінки сходяться повільно. Розходяться різкіше, ніж УРМНК. Оцінки фільтра шуму  $D = [d_1, \dots, d_m]$  сходяться повільніше і потребує більшого обсягу обчислень, ніж УРМНК. У МСА прийнятна точність досягається при досить великій кількості вимірювань. Збіг визначається числом  $s$  у рівняння (2.218). Обсяг обчислень малий.

За малих обсягів обчислень та шуму високої інтенсивності усі методи (крім МСА) мають однакову якість оцінок.

Перевагу надають РМНК, оскільки він легший від інших та гарантує збіг. Перевага РММП проявляється для великих обсягів вибірок.

**Приклад.** Ідентифікація рекурентним методом найменших квадратів моделі ЕТО, представленою передатною функцією

$$W(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}$$

та білим шумом на вході [10].

```
Програма ідентифікації РМНК:
k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*I;p3=-3-4*I;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
tm=5000;dt=.2;
t=0:dt:tm;
n=length(t);
u=100*randn(n,1);
y=laim(wo,u,t);
subplot(2,1,1)grid
plot(t,u),grid
title(Вхідний сигнал)
subplot(2,1,2),grid
plot(t,y),grid
title('Вихідний сигнал')
pause
subplot(1,1,1)
my=mean(y);mu=mean(u);
yc=y-my;
uc=u-mu;
m=3, % Задання розмірності АРСС-моделі ЕТО
% Задання початкових умов в РМНК
P=1000*eye(2*m,2*m);
Q=zeros(2*m,1);
F=Q;
%Метод РМНК
for i=1:n-m
```

```

F=[-yc(i+m-1:-1:i);uc(i+m-1:-1:i)];
ch=P*F;
zn=1+F'*P*F;
gm=ch/zn;
P=(eye(2*m)-gm*F')*P;
Q=Q+gm*(yc(m+i)-F'*Q);
kf(i,1:2*m)=Q'; % Коефіцієнти АРСС-моделі ЕТО
TP(i)=F'*Q;
End
% Похибка ідентифікації та її характеристики
e=yc(m+1:end)-Tp';
de=std(e);
plot(t(1:n-m),kf),grid
pause
sr=[yc(m+1:end),Tp'];
plot(sr),grid
pause
plot(e),grid
% Обчислення передавальної функції ЕТО та його
характеристик
nun=kf(end,m+1:end);
den=[1 kf(end,1:m)];
wod=tf(nun,den,dt) % Обчислення дискретної передава-
льної функції об'єкта ЕТО
won=d2c(wod) % Обчислення передавальної функції об'єкта

```

Подамо на вхід об'єкта білий шум (рис. 2.10).

За отриманою АРКС-моделлю були обчисленні дискретна, а за нею виходячи зі співвідношень  $W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{w(p)}{p} \right\}$  та  $W(p) = P\alpha \left\{ \frac{z}{z-1} W(z) \right\}$  неперервна передатна функція ідентифікованої моделі, яка досить близька до дійсної передатної функції (2.164).

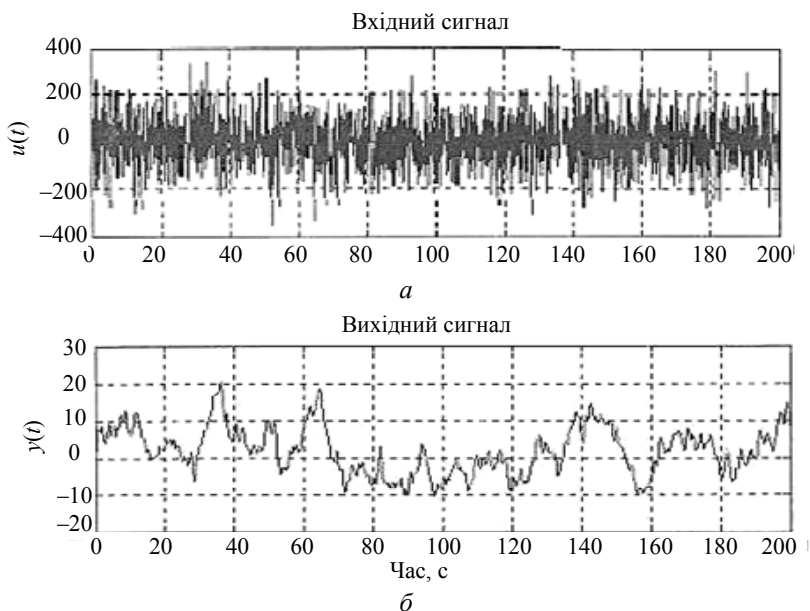


Рис. 2.10. Сигнали об'єкта ідентифікації:  
 $a$  — вхідний;  $b$  — вихідний

$$W(z) = \frac{0,0003558(z + 3,181)(z + 0,2318)}{(z - 0,99)(z^2 + 1,364z + 0,5486)},$$

$$W(p) = \frac{1,4801 \cdot 10^{-6}(p^2 - 34,41p + 1,69 \cdot 10^6)}{(p + 0,1001)(p^2 + 6,004p + 25,01)} \approx \frac{2,501}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}.$$

Отримані результати свідчать про ефективність РМНК для ідентифікації лінійних ЕТО за умови дуже великих вибірок даних та білого шуму на вході, що в реальних об'єктах не завжди можливо забезпечити.

Великі вибірки даних пасивного експерименту мають як інформативні, так і не інформативні ділянки. Тому важливо при ідентифікації ЕТО брати зі всього масиву даних тільки інформативні складові (див. наступний розділ).

## 2.4. Підвищення інформативності даних

### 2.4.1. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах пасивного експерименту на ЕТО

Якщо точні значення  $X^*$ ,  $Y^*$  не на всіх ділянках вибірки достатньо потужні і мають ділянки з лінійно незалежними компонентами  $x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то зі зростанням довжини  $M$  такої вибірки зменшення коваріації  $\text{cov} \hat{\beta}$ , визвано перешкодою  $N_Y$ , може бути несуттєвим, а зсув, визвано перешкодою  $N_X$ , може навіть зрости. Тому для досить великих чисел  $M$  доцільно провести зважування даних з метою їх повної чи часткової ортогоналізації.

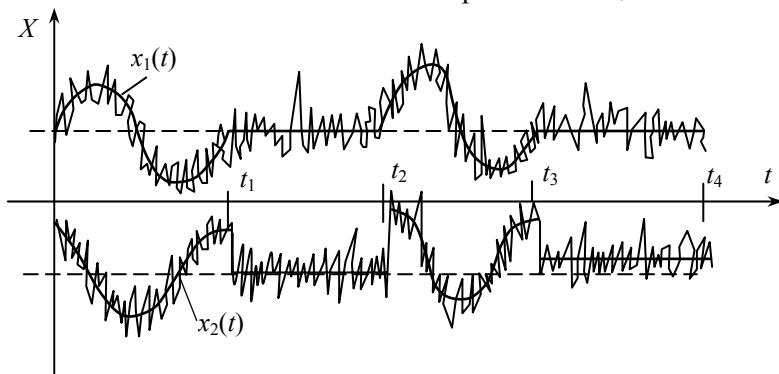


Рис. 2.11. Інформативні  $([0, t_1], [t_2, t_3])$  і неінформативні  $([t_1, t_2], [t_3, t_4])$  ділянки вибірки  $X^T = [x_1, x_2]$ .

На рис. 2.11 наведено найпростішу ілюстрацію необхідності такого зважування вибірок. Якщо ввести функцію ваги

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], [t_2, t_3] \\ 0, & t \in [t_1, t_2], [t_3, t_4] \end{cases}$$

то інформаційна матриця  $X^T X$  буде діагональною внаслідок ортогональності  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  на ділянках, де  $\eta(t) = 1$ . Якщо зробити навпаки, то  $X^T X$  буде виродженою.

Побудуємо декілька алгоритмів квазидіагоналізації матриці  $X^T X$ .

**Алгоритм 1.** У рекурентному МНК введемо адаптивну до поточного значення  $X$  вагову функцію

$$\eta_j(k) = \frac{x_j^2(k)}{\sum_{i=1}^n |x_i(k)x_j(k)|}. \quad (2.220)$$

Тоді вага вимірів буде збільшуватись для тих  $k$ , де більше відношення діагональних елементів матриці  $X^T X$  до недіагональних. Зважена матриця вже не буде симетричною, але буде краще обумовленою:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \cdot X_B(k)\epsilon(k), \\ P_{k+1} &= [P_k^{-1} + X_B(k) \cdot X_B^T(k)]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.221)$$

де  $X_B^T(k) = [\eta_1(k) \cdot x_1(k), \dots, \eta_n(k) \cdot x_n(k)]$ .

**Алгоритм 2.** Можна отримати більш якісний результат, якщо вводити вагові функції  $\eta_i(t)$  з умови максимальної точності оцінювання тільки  $i$ -го параметру  $\hat{\beta}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так для МНК, УМНК, МДЗ оцінку  $\hat{\beta}_i$  можна представити, як рішення рівняння

$$B = A \hat{\beta}, \quad (2.222)$$

яке є відношенням визначника  $\Delta_i$  матриці  $A_i$  (матриці  $A$ , у якій  $i$ -й стовпчик замінено на вектор  $B$ ) до визначника  $\Delta$  матриці  $A$ :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}. \quad (2.223)$$

Диференціал виразу (2.223) відносно точних значень (\*) дорівнює

$$d\hat{\beta}_i = \frac{d\Delta_i}{\Delta^*} - \frac{d\Delta \cdot \Delta_i^*}{(\Delta^*)^2},$$

або

$$\frac{d\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_i^*} = \frac{d\Delta_i}{\Delta_i^*} - \frac{d\Delta}{\Delta^*}. \quad (2.224)$$

Звідси отримаємо вираз для відносної дисперсії:



$$\left( \frac{\sigma_{\delta\beta_i}}{\hat{\beta}_i^*} \right)^2 = \frac{\sigma_{\Delta_i}^2}{(\Delta_i^*)^2} + \frac{\sigma_{\Delta}^2}{(\Delta^*)^2} - \frac{2\sigma_{\Delta_i\Delta}^2}{\Delta_i^* \Delta^*}. \quad (2.225)$$

Для зменшення дисперсії відносної похибки  $\frac{\delta\beta_i}{\hat{\beta}_i^*}$  в оцінці  $\hat{\beta}_i$  необхідно максимізувати не тільки  $\Delta$ , але і  $\Delta_i$ . Виходячи з цього, отримаємо оптимальну вагову функцію  $\eta_i^*(k)$ :

$$\eta_i^*(k) = \arg \max_{\eta \in \{-1, 1\}} |\Delta \cdot \Delta_i|, \quad k = \overline{1, M}. \quad (2.226)$$

Тобто додаємо змінні ( $\eta_i(k) = 1$ ) чи віднімаємо ( $\eta_i(k) = -1$ ), добиваючись виконання (2.226).

Багатокроковий процес визначення  $\eta_i^*(k)$  може бути побудовано по схемі: для ( $\eta_i^*(k) = 1$ ),  $k = \overline{1, M}$  обчислюються елементи  $a_{ij}$ ,  $b_i$  матриць  $A$  і  $B$  в (2.222), по ним —  $\Delta$ ,  $\Delta_i$ , а також значення  $|\Delta \cdot \Delta_i|$ ;  
для всіх рядків

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{\beta}_j$$

рівняння (2.222) послідовно в кожній  $k$ -й точці перебираються всі можливі сполучення із  $n$  по 2 (так як  $\eta_i \in \{-1; +1\}$ ) добутків  $x_i(k) \cdot x_j(k)$  зі знаком плюс; або мінус ( $\eta = -1$ ) і залишається в кожній  $k$ -й точці те, для якого (2.226) максимальне, і так для всіх  $k = \overline{1, M}$ ;

— процес повторюється  $l$  разів, доки різниця величин  $|\Delta \cdot \Delta_i|$  на  $l$ -му і  $(l-1)$ -му кроках не стане малозначною відносно до  $|\Delta \cdot \Delta_i|$ . Після цього обчислюється оцінка (2.223)  $\hat{\beta}_i$ . Процес повторюється для  $(i+1)$ -ої оцінки,  $i = \overline{1, n}$ .

Швидкодія цього алгоритму невисока, так як приходить ся  $M \cdot l \cdot 2^n$  раз розраховувати значення  $|\Delta \cdot \Delta_i|$ .

Якщо  $X^*$ ,  $Y^*$  гладкі функції, то перебір  $\eta_i(k)$  можна проводити на відрізках  $[k - m, k + m]$  з  $2m$  точок. Кількість обчислень  $|\Delta \cdot \Delta_i|$

зменшиться до  $\frac{M}{2m} l 2^n$ .

**Алгоритм 3.** Попередні алгоритми діагоналізації матриці  $A$  системи нормальних рівнянь не забезпечують симетричності  $A$ . Даний алгоритм передбачає при діагоналізації матриці  $A$  збереження її симетричності. Нехай у результаті застосування МНК, УМНК, ІМНК чи МДЗ сформована система

$$A \hat{\beta} = B, \quad (2.227)$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^M a_{ij}(k),$$

де  $a_{ij}(k)$  — визначається залежно від методу, наприклад, для МНК:

$$a_{ij}(k) = x_i(k)x_j(k); \quad B = [b_i]_{i=1}^n,$$

$$b_i = \sum_{k=1}^M b_i(k); \quad b_i(k) = y(k)x_i(k).$$

Введемо в систему (2.227) функцію ваги:

$$\left[ \sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) \right]_{i,j=1}^n \hat{\beta} = \left[ \sum_{k=1}^M \eta_i(k) b_i(k) \right]_{i=1}^n. \quad (2.228)$$

Число обумовленості ( $cond A$ ) симетричної матриці  $A$  дорівнює відношенню максимального власного значення  $\lambda_A$  матриці  $A$  до мінімального [14]:

$$cond A = \frac{\max \lambda_A}{\min \lambda_A}. \quad (2.229)$$

Для діагональної матриці  $A$   $cond A = 1$ , для виродженої — нескінченність. Відома [5] нерівність:

$$\max |\lambda_i - \lambda_j| \leq \sqrt{2 |SpAA^T| - \frac{1}{n} (SpA)^2}, \quad (2.230)$$

де  $SpA$  — слід матриці  $A$ , а  $|SpAA^T| = |A|$  — евклідова норма матриці  $A$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;  $i \neq j$ .

З виразу (2.230) видно, що, мінімізуючи праву частину при обмеженні на слід  $A$ :  $SpA = Cn$ , або на кожний елемент  $a_{ii}$  сліду

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ii}(k) = C, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.231)$$

за умови симетричності  $a_{ij}$  і  $a_{ji}$

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) = \sum_{k=1}^M \eta_j(k) a_{ji}(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (2.232)$$

можна забезпечити мінімум  $|\lambda_i - \lambda_j|$  за фіксованої завдяки (2.231) мінімальної величині  $\lambda_i, \lambda_j$ ; тобто забезпечити мінімум  $\text{cond } A$  (2.229). Якщо покласти  $C = 1$ , то при повній діагоналізації матриці  $A$ :

$$\hat{\beta}_i = \sum_{k=1}^M \eta_i(k) b_i(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.233)$$

де

$$\sum_{k=1}^M \eta_i(k) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \quad (2.234)$$

Таким чином, необхідно виконати  $n$  умов (2.231),  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  — (2.232) або  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  — (2.234), усього  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  умов, змінюючи  $M \cdot n$  значень  $\eta_i(k)$  ( $i = \overline{1, n}; k = \overline{1, M}$ ).

Оскільки  $M \gg n$ , то задача може бути розв'язана. Рішення можна спростити, якщо функції  $\eta_i(k)$  параметризувати:

$$\eta_i(k) = \sum_{l=1}^m \gamma_{il} \phi_l(k), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (2.235)$$

де  $\phi_l(k)$  — базисні функції.

Тоді  $m \cdot n$  коефіцієнтів  $\gamma_{il}$  визначаються  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$  умовами (2.231), (2.232) або (2.234). так, поклавши  $C = 1$ , з (2.231), (2.234) та (2.235) отримаємо систему лінійних відносно  $\gamma_{il}$  рівнянь:

$$\sum_{k=1}^M \left( \sum_{l=1}^m \gamma_{il} \phi_l(k) \right) a_{ii}(k) = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{k=1}^M \left( \sum_{l=1}^m \gamma_{il} \phi_l(k) \right) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n};$$

або

$$\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \left( \sum_{k=1}^M \phi_l(k) \right) a_{ii}(k) = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{l=1}^m \gamma_{il} \left( \sum_{k=1}^M \phi_l(k) \right) a_{ij}(k) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n}.$$

У матричній формі:

$$F \cdot \gamma = G \quad (2.236)$$

де  $F$  — ґраткова матриця  $(m \cdot n) \times (m \cdot n)$ ;  $\gamma$  — вектор  $\gamma_{il}$  розмірності  $(m \cdot n) \times 1$ ;  $G$  — вектор з одиничними і нульовими елементами.

Система (2.236) вирішується по МНК.

МНК — рішення системи (2.4.17)

$$\hat{\gamma} = (F^T F)^{-1} F^T G \quad (2.237)$$

буде точно задовольняти умови (2.231), (2.234), і оцінки  $\hat{\beta}_i$  будуть визначені з (2.233). Якщо  $m$  — парне, то можна задати різні числа  $m_i$  для різних  $i$  так, щоб  $\sum_{i=1}^n m_i = 0,5(n^2 + n)$ . Тоді (2.237) буде точно

задовольняти (2.231), (2.234). Матриця  $(F^T F)$  не вироджена, якщо  $x_i(k)$  і  $\phi_l(k)$  утворюють системи  $\{x_i(k)\}$ ,  $\{\phi_l(k)\}$  лінійно незалежних функцій. Тобто повинна бути не виродженою сама матриця  $A$  в (2.227). Як  $\{\phi_l(k)\}$  може бути задана будь-яка система лінійно незалежних, краще ортогональних функцій; Зручними для обчислень можуть бути функції Хаара [8] та інші, що приймають значення  $\pm 1$ .

#### **2.4.2. Покращення збіжності процесу оптимізації не строго випуклих функціоналів**

Для методів ідентифікації характерна така властивість: чим більше невизначеність задачі, тим простіше її рішення. В алгоритмах, де  $\hat{\beta}$  входить лінійно, це МНК; в алгоритмах нелінійного оцінювання, при невизначеності статистичних характеристик поверхні  $I(\beta)$ , це ґradientна процедура [42]:

$$\hat{\beta}(q+1) = \hat{\beta}(q) - \lambda(q) \frac{\partial I(\hat{\beta}(q))}{\partial \hat{\beta}}. \quad (2.238)$$

Для збіжності алгоритму (3.16), необхідно, щоб  $I(\hat{\beta})$  був неперервно диференціюємий за Фреше по  $\hat{\beta}$ :

$$\lim_{(\Delta\hat{\beta} \rightarrow 0)} \left\| \frac{\partial I(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta})}{\partial(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta})} - \frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} \right\| = 0, \quad (2.239)$$

і задовольнялася умова Ліпшица для градієнта від  $I$ :

$$\lim_{(\Delta\hat{\beta} \rightarrow 0)} \left\| \frac{\partial I(\hat{\beta}_1)}{\partial\hat{\beta}_1} - \frac{\partial I(\hat{\beta}_2)}{\partial\hat{\beta}_2} \right\| \leq L \|\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2\|, \quad (2.240)$$

де  $L > 0$ ,  $\|\cdot\|$  — норма в банаховому просторі [4].

Враховуючи (2.239), можна записати:

$$I(\hat{\beta} + \Delta\hat{\beta}) - I(\hat{\beta}) = \frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta} + \varepsilon(\|\Delta\hat{\beta}\|), \quad (2.241)$$

де

$$\lim_{\Delta\hat{\beta} \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\|\Delta\hat{\beta}\|)}{\|\Delta\hat{\beta}\|} = 0, \quad \Delta\hat{\beta} = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}^*.$$

При виконанні (2.240), (3.19) існують [11] такі  $\lambda(q)$ , за яких алгоритм (2.238) сходиться до стаціонарної точки, яка для сильно випуклого функціонала відповідає  $\hat{\beta}^*$ . Так для квадратичного сильно випуклого функціоналу

$$I(\hat{\beta}(q)) = I_o + \Delta\hat{\beta}^T \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta},$$

$$\Delta\hat{\beta} = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}^*,$$

узявши похідну по  $\hat{\beta}$ :  $\frac{\partial I(\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}$ , і підставивши її в (2.238)

отримаємо:

$$\Delta\hat{\beta}(q+1) = -\lambda(q) \frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T} \Delta\hat{\beta}(q), \quad (2.242)$$

де  $\frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^T}$  — сильно додатний [4] оператор.

Тоді існують такі не рівні нулю  $\lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q)\}$ , що система (2.242) буде асимптотично стійкою. Практично градієнт розраховується неточно внаслідок перешкод.

Суттєвим недоліком градієнтного алгоритму є мала швидкість збіжності в ситуаціях «яру». Для прискорення збіжності пропонується модифікація «метода яру», яка полягає в застосуванні  $n$  однотипних моделей з початковими значеннями  $\hat{\beta}^{(l)}(0)$ ,  $(l = \overline{1, n})$  параметрів  $l$ -ї моделі, заданими в  $l$ -й вершині  $n$ -вимірного куба, всередині якого знаходиться значення  $\hat{\beta}^*$ . Тоді для кожної  $l$ -ї моделі можна побудувати показник  $I_1^{(l)}$  з добавкою, яка прискорює збіжність:

$$I_2^{(l)} = \alpha_1 (\Delta \hat{\beta}_H^{(l)})^T \Delta \hat{\beta}_H^{(l)}, \quad (2.243)$$

де  $\alpha_1$  — параметр алгоритму  $(\Delta \hat{\beta}_H^{(l)})^T = \left( \frac{\hat{\beta}_1^{(l)} - \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_1}, \dots, \frac{\hat{\beta}_n^{(l)} - \bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_n} \right)$ ,

$\bar{\beta}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \hat{\beta}_i^{(l)}$  —  $i$ -а компонента для  $l$ -ї моделі:

$$\frac{\partial I^{(l)}}{\partial \hat{\beta}_i^{(l)}} \approx \frac{\partial I^{(l)}}{\partial \hat{\beta}_{ii}^{(l)}} + \frac{\hat{\beta}_i^{(l)} - \bar{\beta}_i}{\bar{\beta}_i}. \quad (2.244)$$

Підставивши (2.244) в (2.238), отримаємо градієнтні алгоритми з прискореною збіжністю в ситуаціях «яру». При  $\alpha_1 = 0$  має місце градієнтне налаштування  $n$  моделей. Тоді по розкиду стаціонарних точок між моделями можна судити про розкид оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$\text{cov}[\hat{\beta}] \approx \left[ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j}^2 \right]_{i,j=1}^n, \quad (2.245)$$

де

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (\hat{\beta}_i^{(l)} - \bar{\beta}_i)(\hat{\beta}_j^{(l)} - \bar{\beta}_j).$$

При  $l_1 \rightarrow \infty$  у (2.243) усі  $n$  моделей зразу перебудують свої параметри до середньої відносно початкових значень величини, тобто до  $\hat{\beta}_0$ , відповідного центру гіперкуба початкових значень. Доцільно  $\alpha_1$  задавати зростаючим від нуля. Тоді на перших кроках має місце незалежний рух параметрів кожної моделі на «дно яру», а

потім зяттягування по яру оцінок  $\hat{\beta}^{(l)}$  до середньої  $\bar{\beta}$ , яка також змінюється, наближаючись до стаціонарної точки  $\hat{\beta}^*$ . Число моделей може бути як більшим, так і меншим  $n$ . Так застосування тільки двох моделей дозволяє побудувати алгоритм з бажаним законом зміни показника  $I$  у часі  $t$ :

$$I = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + \alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}). \quad (2.246)$$

Задамося бажаним законом

$$f(t) = \frac{dI}{dt} < 0, \quad (2.247)$$

де  $f(t)$  — бажана функція часу, наприклад, експонента, константа і та ін.

Підставимо із (2.246) значення  $\frac{dI}{dt}$  в (2.247). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} f(t) = & \left( \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right)^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} + \left( \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right)^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} + \\ & + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)})^T \left( \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} - \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} = \\ & = f(t) - \left[ \left( \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right]^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[ \left( \frac{\partial I_1^{(1)}}{\partial \hat{\beta}^{(1)}} \right) + 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right], \\ A_2 &= \left[ \left( \frac{\partial I_1^{(2)}}{\partial \hat{\beta}^{(2)}} \right) - 2\alpha_1 (\hat{\beta}^{(1)} - \hat{\beta}^{(2)}) \right], \end{aligned}$$

тоді

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} &= (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \left( f(t) - A_2^T \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} \right) \\ \frac{d\hat{\beta}^{(2)}}{dt} &= (A_2 A_2^T)^{-1} A_2 \left( f(t) - A_1^T \frac{d\hat{\beta}^{(1)}}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.248)$$

За умови випуклості функціоналу (2.246) алгоритми (2.248), побудовані за умови (2.247) гарантують збіжність не тільки за функціоналом (2.246), але і за параметрами  $\hat{\beta}^{(1)}$ ,  $\hat{\beta}^{(2)}$  до  $\hat{\beta}^*$  за заданого закону зменшення  $I_1$ .

В умовах нестаціонарності сигналів, перешкод та параметрів доцільна додаткова фільтрація, наприклад, інерційним фільтром першого порядку  $W_\Phi(p) = (\alpha p + 1)^{-1}$ , де  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $\alpha$  — стала фільтру.

Тоді градієнтний алгоритм (2.238) перетворюється на метод «важкої кульки» [3]

$$\alpha \frac{d^2 \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\hat{\beta}}{dt} = -\lambda \frac{\partial I(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}, \quad (2.249)$$

у якому параметр  $\alpha$  «вага кульки» може бути адаптивним: «вага» повинна бути такою, щоб  $\hat{\beta}$  гладко «скочувалася» по нестаціонарній стохастичній поверхні функціоналу до мінімуму. Для стаціонарних об'єктів (згідно з методом стохастичної апроксимації [6]) можна вимагати, щоб  $\alpha(t)$  необмежено зростала. Суттєво впливає на збіжність алгоритму (2.249) множник  $\lambda$ . З метою доцільного вибору його структури перепишемо (2.249) з урахуванням (2.242):

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d\Delta \hat{\beta}}{dt} + \lambda \frac{\partial^2 I(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \Delta \hat{\beta} = 0, \quad (2.250)$$

де  $\frac{\partial^2 I(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T}$  — стохастична нестаціонарна симетрична матриця миттєвих значень.

Достатньою умовою стійкості системи (2.250) є діагональність матриці  $\frac{\partial^2 I(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T}$ .



Для цього не обов'язково розраховувати матрицю  $\left( \frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \right)^{-1}$ ,

тим більше, що для не усереднених значень вона не завжди існує.

$$\text{Нехай } \frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} = A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n,$$

тоді  $\left( \frac{\partial^2 \mathbf{I}(t)}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}^T} \right)^{-1} = \left[ \frac{A_{ji}(t)}{\det A(t)} \right]$ , де  $A_{ji}(t)$  — алгебрічне доповнення  $ji$ -го елемента матриці  $A(t)$ .

Для ортогоналізації (2.250) достатньо задати  $\lambda = \alpha' [A_{ji}(t)] = \alpha' \det A \cdot A^{-1}$ , тоді

$$\alpha \frac{d^2 \Delta \hat{\beta}}{dt^2} + \frac{d \Delta \hat{\beta}}{dt} + \alpha' \det A \Delta \hat{\beta} = 0,$$

де  $\alpha'$  — параметр алгоритму.

Такий алгоритм адаптивний до «інформативності»: якщо фішерівська матриця  $A$  не інформативна (вироджена), то  $\det A(t)$  близький до нуля і (за  $\alpha = \text{const}$ )  $\Delta \hat{\beta} = 0$ , при появі корисної інформації відбувається незалежна настройка кожного елемента  $\hat{\beta}_i$  вектора  $\hat{\beta}$ :

На практиці реалізується алгоритм

$$\frac{d \Delta \hat{\beta}}{dt} = -\alpha [\hat{A}_{ij}(t)] \frac{\partial \hat{I}(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}, \quad (2.251)$$

де  $\hat{A}_{ij}(t), \frac{\partial \hat{I}(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}$  — згладжені фільтром  $W_\Phi$  значення

$$A_{ij}(t), \frac{\partial I(\hat{\beta}, t)}{\partial \hat{\beta}}.$$

На рис. 2.6 представлено функціональну схему алгоритму (2.251) ортогональної настройки  $\hat{\beta}_i$  з адаптацією до «інформативності» сигналів об'єкта.

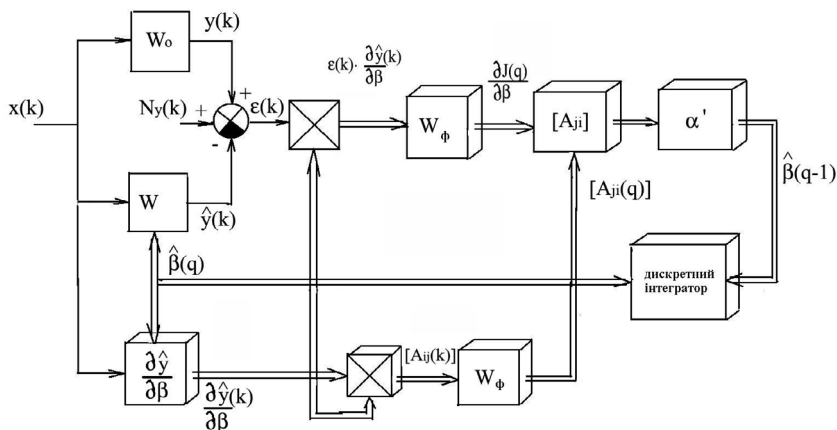


Рис. 2.12. Структурна схема системи ідентифікації з градієнтним алгоритмом (2.251)

### 2.4.3. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах активного експерименту на ЕТО

#### 2.4.3.1. Теоретичне обґрунтування доцільності покоординатної квазидіагоналізації

Якщо функціонал  $I(\beta)$  має характер «яру», тобто не є строго випуклим і в окремих напрямках має дуже малі зміни, то система

$$I''(\beta^*)\Delta\hat{\beta} = -I'(\beta^*), \quad (2.252)$$

де  $I''$  — друга, а  $I'$  — перша похідні від  $I$  по  $\hat{\beta}$  у точці  $\beta^*$ , буде погано обумовлена. Тоді рішення

$$\hat{\beta} = [I''(\beta^*)]^{-1} I'(\beta^*), \quad (2.253)$$

буде надто неточним унаслідок некоректності обчислень за виразом (2.253).

Основна умова «яро-подібності»  $I(\beta)$  — це суттєве розділення спектра матриці  $I''(\beta^*)$  на дві групи, що відповідають великим і малим власним числам  $\lambda$ :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{k-1} \geq \sigma \lambda_k \geq \dots \geq \sigma \lambda_n; \quad \sigma \gg 1. \quad (2.254)$$

Для системи (2.252) за дно «яру»  $Q$  можна прийняти лінійну оболонку власних векторів, що відповідають малим власним числам:

$$Q = \{x \in R^n \mid x - x^*, u_i \geq 0 (i = \overline{1, n-r})\}, \quad (2.255)$$

$$Q_\delta = R^n; \quad \sigma \approx \lambda_1 / |\lambda_{n-r+1}|.$$

При цьому умова «яро-подібності» (2.254) виконується.

Число обумовленості матриці  $I''(\beta^*)$  для моделі (2.254), (2.255) «яро-подібного» функціоналу  $I(\beta)$  визначається співвідношенням:

$$\text{cond}(I''(\beta^*)) = \|I''(\beta^*)\| \| [I''(\beta^*)]^{-1} \| = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \geq \sigma \gg 1. \quad (2.256)$$

Причому найбільша похибка рішення (2.253) зосереджена в підпросторі, натягнутому на власні вектори матриці  $I''(\beta^*)$ , що відповідають малим власним числам. Доведемо це.

Нехай для  $I''(\beta^*)$  виконується умова (2.254). Тоді похибки рішення (2.253) задовольняють співвідношенню.

$$\Delta d_i < \sigma^{-1} \Delta d_j; \quad \sigma \gg 1; \quad i = \overline{1, k-1}; \quad j = \overline{k, n}. \quad (2.257)$$

Відомо [4], що рішення (2.253) системи (2.252) може бути представлено у вигляді:  $\Delta\beta = \sum d_i u_i$ , де  $u_i$  — власні вектори матриці  $I''(\beta^*)$ .

Коефіцієнти  $d_i$  дорівнюють  $d_i = C_i / \lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , де  $\lambda_i$  — власні числа матриці  $I''(\beta^*)$  відповідні до векторів  $u_i$ ;  $C_i$  — коефіцієнти розкладання вектора  $I(\beta)$  по базису  $\{u_i\}_{i=1}^n$ .

Розклавши похибку  $\delta\beta$  по цьому самому базису

$$\Delta\beta + \delta\beta = \sum_{i=1}^n a_i u_i,$$

де  $a_i = d_i + \Delta d_i = \frac{C_i + \Delta C_i}{\lambda_i + \Delta\lambda_i} = \frac{C_i}{\lambda_i} + \frac{\Delta C_i \lambda_i - C_i \Delta\lambda_i}{(\lambda_i + \Delta\lambda_i) \lambda_i}$ , отримаємо, що

$$\Delta d_i = \frac{\Delta C_i \lambda_i - C_i \Delta\lambda_i}{(\lambda_i + \Delta\lambda_i) \lambda_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Так, згідно з (2.255), власні вектори  $u_k, \dots, u_n$  задають дно «яру», де норма вектора градієнта  $\|I'(\beta)\|$  визначається малими власними числами і суттєво менша, ніж в іншій частині простору параметрів  $\beta$ , то

$$C_i < C_j; \quad i = \overline{1, k-1}; \quad j = \overline{k, n}; \quad (2.258)$$

у той же час

$$\lambda_i \geq \sigma \lambda_j C_j; i = \overline{1, k-1}; j = \overline{k, n}. \quad (2.259)$$

Тобто маємо, що  $\Delta d_i < \sigma^{-1} \Delta d_j$ ;  $\sigma \gg 1$ , що і треба було довести.

З цього випливає, що осі найбільш раціональної системи координат при мінімізації квадратичних функціоналів структури «яру» співпадають з власними векторами матриці  $I''(\beta^*)$ . Залежність похибки  $\delta\beta$  від взаємної орієнтації координатного і ортонормованого базисів показано на рис. 2.13.

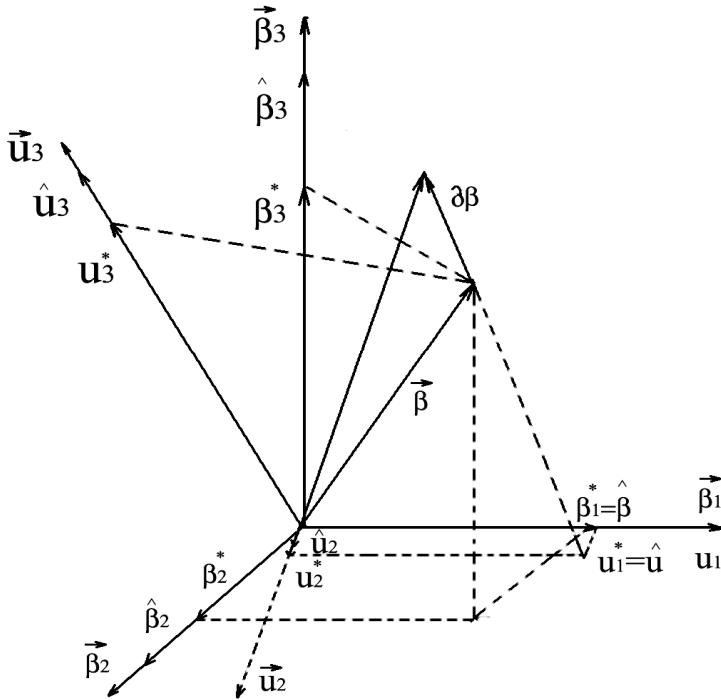


Рис. 2.13. Залежність похибки  $\delta\beta$  від вибору базису

При співпаданні координатного орта і власного вектора  $u_i$  похибка  $\delta\beta_i$  оцінки  $\hat{\beta}_i$  мінімальна. У протилежному випадку навіть для великих власних чисел ( $\beta_2$  і  $u_2$ ) похибка  $\delta\beta_2$  оцінки  $\hat{\beta}_2$  суттєва. Для малих власних чисел ( $\beta_3$  і  $u_3$ ) похибка  $\delta\beta_3$  максимальна.

При співпаданні координатного і ортонормованого базисів квадратичний функціонал

$$I(\beta) \cong I(\beta^*) + I'(\beta^*)\Delta\beta + \frac{1}{2}\Delta\beta^T I''(\beta^*)\Delta\beta \quad (2.260)$$

приймає сепарабельний вигляд:

$$I(\beta) = \sum_{i=1}^n I(\beta_i), \quad (2.261)$$

оцінки  $\hat{\beta}_i$  знаходяться незалежно і гарантується малість похибки  $\delta\beta_j$  для тих  $\beta_j$ , що мають великі власні числа.

Задача суттєво спрощується, якщо необхідно забезпечити співпадання одного з координатних ортів  $\beta_i$  з власним вектором  $u_i$ . При цьому похибки  $\delta\beta_j$  за іншими напрямками  $u_j$  ( $j \neq i$ ) мало впливають на  $\delta\beta_i$ .

Необхідні властивості  $I(\beta)$  можна забезпечити відповідним вибором керуючих впливів, тобто активним експериментом на досліджуваному об'єкті. Доведемо це таким твердженням:

Нехай матриця  $I''(\beta)=A$  має структуру:

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{kj} = a_{jk} = 0; \quad i, j \neq k,$$

де  $k$  — фіксоване число,  $1 \leq k \leq n$ , тоді  $a_{kk} = \lambda_k(A)$  і власний вектор  $u_k(A)$  співпадає з координатним ортом  $\bar{\beta}_k$ .

За теоремою про спектральний розклад [4] представимо матрицю  $A$  у вигляді:

$$\Lambda = U^T A U = U^T A_1 U + U^T A_2 U, \quad (2.262)$$

де  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ;  $A_1 = A - A_2$ ,  $A_2 [n \times n]$  — матриця, у якій всі елементи, окрім  $a_{kk}$ , дорівнюють нулю;  $U$  — ортогональна матриця, стовпцями якої є власні числа матриці  $A$ .

Через ортогональність базису

$$U^T A_2 U = a_{kk} \bar{U}_k \cdot \bar{U}_k = \text{diag}(0, \dots, a_{kk}, \dots, 0), \quad (2.263)$$

$$U^T A_2 U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n). \quad (2.264)$$

Тоді з (2.207) випливає, що

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n). \quad (2.265)$$

Звідси

$$\lambda_k = a_{kk}. \quad (2.266)$$

Згідно з спектральним представленням оператора  $A$  [4] для довільного вектора  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\beta} = C_1 \vec{U}_1 + \dots + C_n \vec{U}_n$ , має місце співвідношення

$$A\vec{\beta} = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \vec{U}_i = \lambda_1 C_1 \vec{U}_1 + \dots + \lambda_n C_n \vec{U}_n. \quad (2.267)$$

З урахуванням (2.211), для  $k$ -го координатного орта матриці  $A$  отримаємо, що

$$a_{kk} \vec{\beta}_k = \lambda_k C_k \vec{U}_k. \quad (2.268)$$

Звідси витікає, що вектор  $\vec{\beta}_k$  співпадає з вектором  $\vec{U}_k$ . Твердження доведено.

Скористаємося отриманим результатом. Задамо критерій синтезу сигналів у вигляді якої-небудь матричної норми  $\|\cdot\|$  різниці оптимізуємої  $I''(\beta)$  і бажаної  $A$  матриць:

$$\mathfrak{I}(I''(\beta)) = \|I''(\beta) - A\|. \quad (2.269)$$

Із нерівності [4]  $\|A - B\| \geq \sum_{i=1}^n [\lambda_i(A) - \lambda_i(B)]^2$  випливає, що функціонал (2.269) з евклідовою нормою  $\|\cdot\|$  і мінімізує середньоквадратичне відхилення власних чисел. Він випуклий, монотонний і однорідний на множині матриць Гессе. Для цього виконуються умови:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\alpha A + (1 - \alpha)B] &\leq \alpha \mathfrak{I}(A) + (1 - \alpha) \mathfrak{I}(B); \\ 0 < \alpha < 1, \mathfrak{I}(A) &\leq \mathfrak{I}; A \leq B; \mathfrak{I}(\alpha A) = \alpha \mathfrak{I}(A). \end{aligned}$$

Ці умови виконуються згідно з аксіоматики матричних норм:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha A\| \leq \|\alpha\| \|A\|.$$

Якщо функціонал зв'язати з одним  $k$ -м порядком матриці  $I''(\beta)$ , то замість (2.214) отримаємо:

$$\mathfrak{I}(I''(\beta)) = \|j''_{ki}(\beta) - a_{ki}\|, \quad (2.270)$$

де  $j''_{ki}$  —  $i$ -й елемент  $k$ -го рядка матриці  $I''(\beta)$ ,  $a_{ki} = a_{kk} \neq 0$ ,  $i \neq k$ .

Після такої оптимізації активних режимів ідентифікації, задача мінімізації «яро-подібного» функціоналу  $I(\beta)$  переходить в задачу покоординатної оптимізації, представленої відносно  $\beta$  в сепарабельному вигляді:

$$\min_{\beta} I(\beta) = \min_{\beta} \sum_{i=1}^n I_i(\beta), \quad (2.271)$$

де  $I_i(\beta) = I_i(\beta_i / C_i \beta = d)$ .

Матриця  $C_i$  лінійних обмежень має вигляд  $C_i'^T = [I_{n-1}, 0]$ .

#### 2.4.3.2. Синтез тестуючих входних впливів на досліджуваний ЕТО

Під час синтезу оптимальних сигналів, тестуючих ЕТО, слід урахувати ряд обмежень:

1. Сигнали повинні бути такими, що фізично реалізуються на ЕТО.

2. Вони не повинні вводити ЕТО в зону аварійних режимів.

3. Їх амплітуда повинна бути такою, щоб виконувались вимоги до співвідношення «сигнал-шум», але не настільки великою, щоб з'являлися на об'єкті явища, не передбачені моделлю (нелінійності та ін.).

4. Сигнали повинні забезпечувати оптимальність відповідного критерію (2.269) чи (2.270). Цим обмеженням може задовольняти послідовність імпульсних входних впливів на динамічний ЕТО.

$$u(t) = u(t_1, t_2, t_3, t_4) = \begin{cases} 0; & t < t_1 \\ \varpi(t - t_1); & t_1 \leq t < t_2 \\ U_{\max}; & t_2 \leq t < t_3 \\ U_{\max} - \varpi(t - t_1) & t_3 \leq t < t_4 \\ 0; & t_4 \leq t < t_5 \end{cases} \quad (2.272)$$

або

$$u(t) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} S(t - t_{j,k}), \quad (2.273)$$

Досить просто реалізуємою на реальних об'єктах техніки і економіки є послідовність імпульсів трапецієвидної форми (рис. 2.14).

$$S(t - t_{j,k}) = \varphi|\omega(t - t_{j,k})|, \quad (2.274)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (2.275)$$

де  $\omega = \frac{du}{dt}$  — крутизна фронтів сигналу.

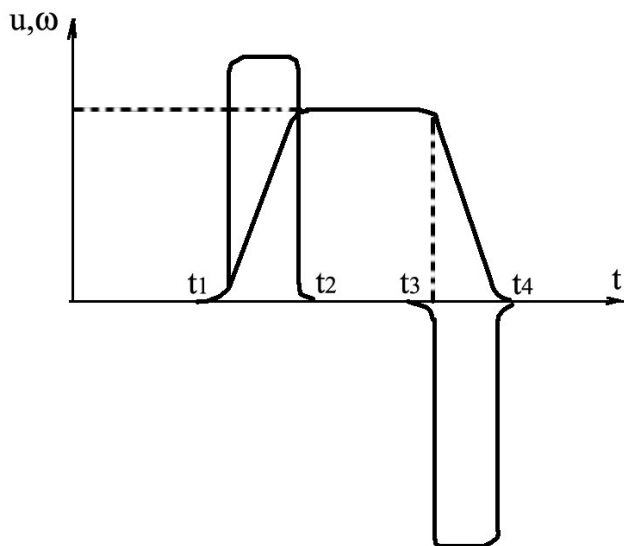


Рис. 2.14. Тестуючий імпульс  $u(t)$  і його похідна  $\omega(t)$

Послідовність управляючих сигналів  $i$ -го управління має вигляд:

$$u^i(t) = \sum_{l=1}^L (-1)^{l+1} u^i(t, t_{l,1}, t_{l,2}, t_{l,3}). \quad (2.276)$$

Похідна одиночного імпульсу

$$\frac{du}{dt} = \omega \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} l(t - t_{jk}), \quad (2.277)$$

де  $l(t)$  — одинична функція  $l(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ .

Відповідно існує обмеження на крутизну фронтів, довжину і амплітуду сигналів:

$$\max \left( \frac{du}{dt} \right) = \omega, \quad (2.278)$$

$$t_{\min} \leq t_{j2} - t_{j1} \leq t_{\max}, \quad (2.279)$$



$$U_{\max} \geq \omega(t_{j2} - t_{j1}). \quad (2.280)$$

Оскільки сигнали повністю визначаються моментами  $t_{i,k}$  та крутизною фронтів  $\omega$ , то не складно, якщо це необхідно, ввести додаткові обмеження на взаємне розташування сигналів при їх синтезі. Задача синтезу оптимальних тестуючих сигналів формулюється як задача оптимального управління: при заданих рівняннях ЕТО

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (2.281)$$

в класі сигналів (2.273)–(2.277) і за обмежень (2.278)–(2.280) потрібно знайти програмне управління  $u(t)$ , за якого функціонал (2.269) чи (2.270) приймає мінімальне значення. Оптимізація управління при класичному функціоналі

$$I = V_3[x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t] dt, \quad (2.282)$$

де  $L$ ,  $V_3$  — задані скалярні функції векторних аргументів  $x$  та  $u$ , досить складна. Це пов'язано з високою розмірністю множин при чисельному рішенні двохточкової крайової задачі функціоналу (2.282).

Застосування напіввизначеного функціоналу

$$I = V_3[x(t_k)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} Q(x, t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (U^T K U + U_{\text{опт}}^T K^{-1} U_{\text{опт}}) dt, \quad (2.283)$$

дозволяє простіше і надійніше вирішити поставлену задачу. В роботі ця задача вирішувалась методом прогнозуючих моделей для синтезу неперервного управління.

*Рішення в нашому випадку.* Будемо вважати моменти переключення в (2.273), (2.276), як компоненти узагальненого об'єкта, отриманого об'єднанням (2.280) і (2.284):

$$\dot{T}_p = U; \quad T_p = \{t_{ij}\}; \quad j = \overline{1, l}; \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.284)$$

Рівняння (2.284) описує перебудову моменту  $j$ -го переключення  $i$ -ї компоненти вектора управління  $T_p$ . Оптимальне за критерієм мінімуму узагальненої роботи (2.283) управління

$$U_{\text{опт}} = -K \frac{\partial V^T}{\partial T}, \quad (2.285)$$

де  $\frac{\partial V}{\partial t}$  — часткова похідна скалярної функції  $V(x, T, t)$ , задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu) = -Q(x, t), \quad (2.286)$$

з граничною умовою  $V(t_k) = V_3$ .

Використання моделі

$$\begin{cases} \dot{x}_M = Ax_M + Bu_M; \\ T_p = 0, \end{cases} \quad (2.287)$$

дозволяє знайти значення функції  $V(x, T, t)$  у точці, що відповідає поточному стану  $\tau_K$  по траєкторії

$$V(x, t, \tau) = V_3(x_M, \tau_K) + \int_{\tau_0}^{\tau_K} Q(x_M, \tau) d\tau, \quad (2.288)$$

де  $\tau$  — поточний час для моделей (2.287).

Підставивши (2.288) в (2.285) з урахуванням правил диференціювання, отримаємо:

$$\begin{aligned} U_{\text{опт}} &= -k \left[ \frac{dV_3(x_M, \tau_k)}{dT_p} + \int_{\tau_0}^{\tau_k} \frac{dQ(x_M, \tau)}{dT_p} \right] = \\ &= -k \left\{ z^T(\tau_k) \frac{\partial V_3(\tau_k)}{\partial x_M(\tau_k)} + \frac{\partial V_3(x\tau_k)}{dT_p} \right. \\ &\quad \left. \int_{\tau_0}^{\tau_k} \left[ z^T(\tau) \frac{\partial Q^T(\tau)}{\partial x_M(\tau)} + \frac{dQ^T(\tau)}{dT_p} \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.289)$$

де  $z(\tau) = \frac{\partial x}{\partial T_p}$  — матрична функція чутливості розширеного об'єкта

(2.283), (2.284), яка отримується шляхом диференціювання по вектору  $T_p$ :

$$\frac{\partial}{\partial T_p} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial T_p} \right) = \dot{z} = A \frac{\partial x}{\partial T_p} + B \frac{\partial u}{\partial T_p} = Az + B \frac{\partial u}{\partial T_p}$$

або

$$\dot{z} = Az + B \frac{\partial u}{\partial T_p}. \quad (2.290)$$

Матриця часткових похідних  $\frac{\partial u}{\partial T_p}$  з урахуванням (2.273).

$$\frac{\partial u}{\partial T_p} = \left\| \frac{\partial u^i(t)}{\partial t_{jk}^i} \right\|, \quad (2.291)$$

де

$$\frac{\partial u^i(t)}{\partial t_{jk}^i} = \omega(-1)^{k+j} 1(t - t_{jk}^i), \quad (2.292)$$

де  $1(t)$  — функція Хевісайда.

Вирішуючи (2.290) відносно  $z$  і водночас інтегруючи (2.292), по закінченню одного циклу моделювання отримаємо вектор градієнтів, який дозволяє визначити, куди вздовж часової осі зміщати моменти переключення  $t_{jk}^i$  для досягнення екстремуму функціонала  $I$  (2.283).

Розмірність вектора  $T_p$  можна скоротити. Так, якщо вважати амплітуду сигналів фіксованою, то розмірність  $T_p$  скорочується удвічі. Сигнал повністю визначається моментами  $t_{j1}^i, t_{j3}^i$ , а послідовність сигналів  $i$ -го управління має вигляд:

$$u^i(t) = \sum_{j=1}^{L_i} (-1)^{j+1} S_i(t - t_j^i), \quad (2.293)$$

де  $L_i$  — число вмикань  $i$ -го органа управління, і  $S_i(t - t_j^i) = \Phi[\omega(t - t_j^i)]$ ,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0; & \text{якщо } x < 0; \\ x; & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ 1; & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases} \quad (2.294)$$

Матриця часткових похідних:

$$\frac{\partial u^i(t)}{\partial t_j^i} = \omega(-1)^{j+1} \left[ 1(t - t_j^i) - 1\left(t - t_j^i - \frac{1}{\omega}\right) \right]. \quad (2.295)$$

Можливе подальше скорочення розмірності вектора  $T_p$ , якщо тестові сигнали мають фіксовану форму. Такі сигнали повністю

визначаються моментом подачі і необхідно визначити лише їх взаємне розташування на часовій осі. Послідовність різнополярних імпульсів може бути описана рівнянням:

$$u_i^j(t) = \sum_{j=1}^{L_i} (-1)^{j+1} S_i(t - t_j^i), \quad (2.296)$$

де  $S(t - t_j^i) = \Phi[\omega(t - t_j^i)]$ ,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0; & \text{якщо } t < t_j \\ x; & \text{якщо } t_j \leq t < t_j + c_1 \\ u_M = c_1; & \text{якщо } t_j + c_1 \leq t < t_j + c_2 \\ u_M - x; & \text{якщо } t_j + c_2 \leq t < t_j + c_2 + c_1 \\ 0; & \text{якщо } t \geq t_j + c_2 + c_1. \end{cases}$$

Обмеження на сигнали, пов'язані з їх взаємним розташуванням та тривалістю експерименту:

$$t_j^i - t_j^k \geq c_3; \forall i, k; t_k - t_1^l \leq T_{\text{екс}}. \quad (2.297)$$

Критерій (2.283) має термінальну складову

$$V_3[t_k] = \mathfrak{I}[J''(\beta)], \quad (2.298)$$

а з обмеженнями виду (2.278)–(2.280), інтегральну складову:

$$Q(x, t) = \begin{cases} c; & \text{якщо } u \in G_u; \\ \alpha^T t_c + \beta; & \text{якщо } u \notin G_u. \end{cases} \quad (2.299)$$

Тоді

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial T_p} = \begin{cases} 0; & \text{якщо } u \in G_u; \\ \alpha; & \text{якщо } u \notin G_u, \end{cases} \quad (2.300)$$

де  $\alpha$  — вектор коефіцієнтів, величина яких залежить від обмежень.

Розроблена методика синтезу тестових сигналів дозволяє побудувати градієнтний алгоритм корекції вектора переключень  $T_p$ :

$$T_p^0 = T_p(t_k^0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.301)$$

що дозволяє ідентифікувати локальні екстремуми функціонала (2.283) у просторі керованих змінних. Умовою зупинки може бути вимога на відносну чи абсолютну точність:

$$|I_{\text{кн}} - I_k| \leq \alpha_1 |I_k| + \alpha_2, \quad (2.302)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  — задані значення відносної і абсолютної точності локалізації оптимуму по функціоналу. При повільному наближенні до екстремуму необхідно також виконувати перевірки по аргументу

$$\|T_p^{k+1} - T_p^k\| \leq \epsilon_1 \|T_p^k\| + \epsilon_2. \quad (2.303)$$

Унаслідок багатоекспериментальності функціонала (2.298) у просторі керованих змінних  $T_p$  можливий випадок, коли локалізований екстремум функціонала не забезпечить суттєвого покращення умов ідентифікування.

При зупинці обчислень необхідно перевірити умову  $I_k \leq I_0$  і повторити пошук оптимального  $T_p$  за інших початкових умов  $T_p^0$ .

### Алгоритм оптимізації:

1. Формуються для (2.286), (2.290) початкові умови:

$$u(t) = u^0(t, T_p), T_p = T_p^0, z(t_0) = 0,$$

де  $T_p, T_p^0$  — початкові умови для моментів переключення і функції чутливості.

2. За формулою (2.287) моделюється рух об'єкта, одночасно по (2.290) інтегрується матричне рівняння чутливості.

3. По результатам моделювання за допомогою (2.289) визначаємо градієнт мінімізуемого функціоналу по керованим змінним  $T_p$ . Підібравши експериментальним шляхом у (2.285) значення  $k$ , отримуємо алгоритм корекції компонент вектора  $T_p$  на  $j$ -й ітерації  $T_p^j = T_p^{j-1} + kv_j$ .

4. Якщо не виконується правило зупинки алгоритму, то перехід до п. 2 для чергової ітерації пошуку  $T_p$ .

Правило зупинки:

$$A_1 = |\mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j-1}| \leq \epsilon_1 |\mathcal{J}_{j-1}| + \epsilon_2, A_2 = \|T_j - T_{j-1}\| \leq \epsilon_1 \|T_{j-1}\| + \epsilon_2,$$

де  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — заздалегідь задані малі числа.

5. Перевіряється умова  $\mathcal{J}_j \leq \mathcal{J}_{\text{зад}}$  і якщо вона виконується, то перехід до п.1 з формуванням нових початкових умов.

На рис. 2.15 наведено поверхню функціоналу  $I$  для ЕТО, що має два керуючих впливи —  $I$  моменти подачі імпульсів  $t_1$  і  $t_2$  (2.296).

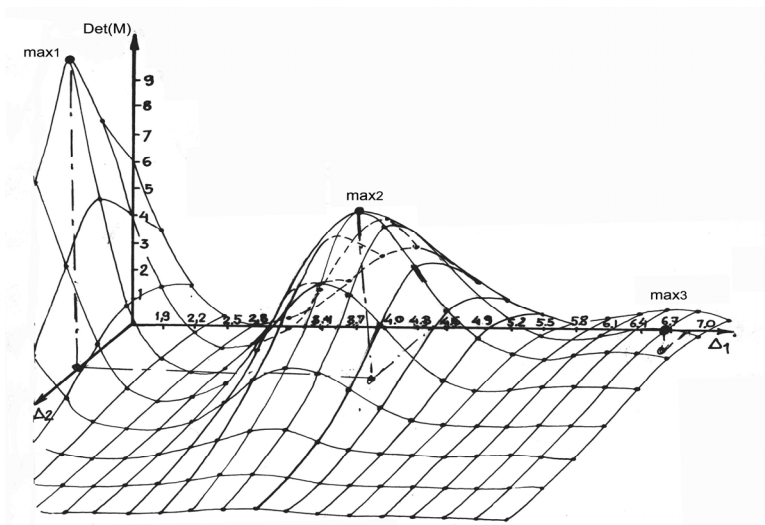


Рис. 2.15. Залежність  $\det M$  від  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  за  $\Delta_3 = \text{const}$

## Список літератури до розділу 2

1. Економетрія / В. І. Жлуктенко, Н. К. Водзянова, С. С. Савіна, О. В. Колодінська (під ред. С. І. Наконечного). — К.: Видавництво Європейського університету, 2005. — 550 с.
2. Іванюта І. Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська. — К.: Слово, 2006. — 272 с.
3. Кафаров В. В. Методы оптимизации в химической технологии / В. В. Кафаров. — М.: Наука, 1968. — 379 с.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1970. — 832 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
6. Любич Ю. И. Общая теория релаксационных процессов / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский. — Успехи математических наук, 1970, №1. — С. 57–112.
7. Льюнг Л. Идентификация систем / Л. Льюнг. — М.: Наука, 1991. — 386 с.
8. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их использование / С. Р. Рао. — М.: Наука, 1968. — 548 с.
9. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
10. Семенов А. Д. Идентификация объектов управления / А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В. Брюхачев. — Изд-во пензенского госуниверситета, 2003. — 200 с.
11. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.
12. Сильвестров А. М. Ідентифікація нелінійних статичних залежностей з динаміки електротехнічних систем / А. М. Сильвестров, Д. К. Зіменков, О. М. Скринник. System Research & Information Technologies, 2016, № 1. — С. 99–106.
13. Толбатов Ю. А. Економетрика / Ю. А. Толбатов. — Тернопіль: підручники і посібники, 2008. — 288 с.
14. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М.: Наука, 1984. — 380 с.
15. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. — М.: Мир, 1975. — 690 с.

# РОЗДІЛ 3

## ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ЕТО ЗА НЕТОЧНИМИ ВИМІРАМИ ВХІДНИХ І ВИХІДНИХ СИГНАЛІВ

### 3.1. Метод найменших квадратів у ситуації зашумленості вимірів вихідних і вхідних сигналів ЕТО

У розділі 1 було показано, що за відповідних умов точна нелінійна, нестационарна модель (1.1) ЕТО може бути зображена наближено лінійною стаціонарною моделлю (1.2) вигляду  $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ , кожен  $i$ -й рядок якої

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k(t)$$

можна умовно подати як рівняння регресії, де  $y(t) = \dot{x}_i(t)$ , а множина функцій  $\{x_j(t), U_k(t)\}$  утворює вектор-функцію  $X(t)$  відповідних регресорів  $\{a_{ij}, b_{ik}\}$  — вектор  $\beta$  параметрів.

Реально маємо ситуацію, за якої всі змінні вимірюються з випадковими похибками на обмеженому відрізку часу.

Наявність випадкових збурень у вимірах незалежних змінних  $X$  призводить до зміщення оцінок  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$  параметрів моделі  $Y = X\beta$ , якщо вони визначаються методом найменших квадратів. Ця ситуація не відповідає умові Гауса–Маркова. Лише за наявності апріорної інформації про дисперсії  $\sigma_i^2$  білих шумів у вимірах  $X_i(k)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ;  $k = \overline{1, m}$ ,  $M \gg n$ ), ситуацію можна дещо виправити, якщо від діагональних елементів  $a_{ii}$  матриці  $X^T X$  відняти присутню в них складову  $M\sigma_i^2$ . Тоді в асимптотиці ( $M \rightarrow \infty$ ) — математичне сподівання оцінки  $\hat{\beta}$  буде незміщеним:  $M(\hat{\beta}) = \beta$ , бо складова  $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$  буде скомплексована складовою —  $M\sigma_i^2$ .

У випадку, якщо апріорі відомо, що  $X_i^*(t_k)$  — гладкі низькочастотні функції, а шуми  $N_i(t_k)$  вимірів  $X_i(t_k)$  високочастотні, оцінку



$\hat{\sigma}_i^2$  дисперсії  $\sigma_i^2$  шуму в вимірах  $X_i(t_k)$  можна отримати шляхом низькочастотної фільтрації сигналів  $X_i(t_k)$  і формування моделі шуму  $\hat{N}_i(t)$ , як різниці  $X_i(t_k)$  і  $\hat{X}_i(t_k)$ , де  $\hat{X}_i(t_k)$  — відфільтроване значення. Тоді оцінка шуму дорівнюватиме:

$$\hat{N}_i(t_k) = X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k), \hat{\sigma}_{i2} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k))^2.$$

Скоригувавши діагональні елементи інформаційної матриці  $X^T X$  на ці дисперсії, отримаємо незміщені МНК-оцінки  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta$ .

Практична постановка задачі часто містить в собі суттєву частку невизначеності статистичних властивостей шумів у вимірах вхідних  $X$  і вихідних  $Y$  даних про ЕТО, модель якого може бути подано як регресійну:

$$Y^* = X^* \beta^* + \epsilon^*, \quad (3.1)$$

де  $Y^*, X^*, \beta^*, \epsilon^*$  — точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, яка утворюється за умови, що оцінку  $\beta^*$  для точних значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\beta^* = (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} Y^* = C^* Y^*; \quad (3.2)$$

$$\text{де } (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} = C^*,$$

тобто, за умови

$$\beta^* = \operatorname{argmin} \epsilon^{*T} \cdot \epsilon^*. \quad (3.3)$$

Однак, часто на практиці МНК-оцінку (3.2) отримують за збуреними перешкодами  $N_x$  і  $N_y$ :

$$\begin{aligned} X &= X^* + N_x; \\ Y &= Y^* + N_y, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{де } X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_i(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_i(2) & \dots & x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & x_2(M) & \dots & x_i(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} Y^T &= [y(1) y(2) \dots y(M)], \quad x_i(j) = x_i^*(j) + N_{xi}(j), \quad y_i(j) = \\ &= y_i^*(j) + N_y(j), \quad j = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

МНК-оцінка (3.2)  $\hat{\beta}$  вектора  $\beta^*$  знаходиться з умови (3.3), але вже для реальних даних (3.4) у звичайній

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = CY, \quad C = (X^T X)^{-1} X^T, \quad (3.5)$$

або у рекурентній формі:

$$\hat{\beta}(j+1) = \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j)[Y(j) - X^T(j)\hat{\beta}(j)],$$

$$P(j+1) = P(j) - P(j)X(j)[X^T(j)P(j)X(j) + 1]^{-1} X^T(j)P(j),$$

з початковими умовами  $P(0)$ ,  $\hat{\beta}(0)$ .

Якщо останні невідомі, то приймають  $\hat{\beta}(0) = 0$ ,  $P(0) = \sigma^2 \beta \cdot I$ ,  $\sigma^2 \beta(0) \rightarrow \infty$ .

Для спрощення аналізу покладемо, що перешкоди  $N_x$  і  $N_y$  — гаусівські білі шуми, авто- і взаємонекооректовані. Визначимо зсув  $\Delta\beta$  оцінки (3.5) відносно точного значення (3.2):

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= M\{\hat{\beta}\} - \beta^* = M\left\{[C^* + \delta C(N)][Y^* + \varepsilon^* + N_y]\right\} - \beta^* = \\ &= M\left\{[C^* + \delta C(N)]Y^*\right\} - \beta^* = \\ &= [X^{*T}X^* + M\{N_x^T N_x\}]^{-1} X^{*T}Y^* - \beta^* = \\ &= [X^{*T}X^* + \text{diag}\sigma_i^2 M]^{-1} X^{*T}Y^* - \beta^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Позначимо

$$X^{*T}X^* = A^*, \quad M\{N_x^T N_x\} = \delta A, \quad X^{*T}Y^* = B^* = M\{X^T Y\} = B.$$

Тоді:

$$(A^*)^{-1} B^* = \hat{\beta}^*, \quad [A^* + \delta A]\hat{\beta} = B^*.$$

$$\text{Звідси} \quad \delta A \hat{\beta} = -A^* (\hat{\beta} - \hat{\beta}^*) = -A^* \Delta\hat{\beta}, \quad \text{тобто}$$

$$\delta A (\hat{\beta}^* + \Delta\hat{\beta}) = -A^* \Delta\hat{\beta},$$

або

$$\Delta\hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1} \delta A \hat{\beta}^*. \quad (3.7)$$

Як бачимо, оцінка  $\hat{\beta}$  за умов навіть некорельованих білих шумів  $N_x$  і  $N_y$ , буде занижена відносно істинної  $\beta^*$  на величину (3.7).

Остання, за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow 0$  прямує до нуля, а  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$ ; за умови, що норма  $\|\delta A\| \rightarrow \infty$  оцінка  $\hat{\beta}$  прямує до нуля.

Коваріація оцінки (3.5) за наведених вище умов та приймаючи, що норма  $\|N_x^T \varepsilon\|$  набагато менша, ніж  $\|X^{*T}\|$  або  $\|N_x^T Y^*\|$ , наближено дорівнює:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\cong M\{[C_1 \varepsilon + C_2 N_x][C_1 \varepsilon + C_2 N_x]^T\} = \\ &= C_1 M\{\varepsilon \varepsilon^T\} C_1^T + C_2 M\{N_x N_x^T\} C_2^T, \end{aligned} \quad (3.8)$$

де  $\varepsilon = \varepsilon^* + N_y$ ,

$$C_1 = [X^{*T} X^* + M\{N_x N_x^T\}]^{-1} X^{*T},$$

$$C_2 = [X^{*T} X^* + M\{N_x N_x^T\}]^{-1} Y^{*T}.$$

Перша складова виразу (3.8) зі зростанням рівня  $N_x$  зменшується, в другій  $C_2$  зменшується, а  $M\{N_x N_x^T\}$  збільшується. Але  $C_2$  входить до виразу (3.8) квадратично, тоді як  $M\{N_x N_x^T\}$  — лінійно. Тому для білого шуму, якщо  $M\{N_x N_x^T\} = \sigma_{N_x}^2 M$ , зі зростанням  $\sigma_{N_x}^2$  коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  зменшуватиметься. Таким чином МНК має властивість регуляризації системи до нормальних рівнянь, подібно до регуляризації за Тихоновим [1]. Остання полягає в мінімізації звичайного квадратичного функціонала  $I = \varepsilon^m \varepsilon$  з регуляризуючим додатком  $\alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}$ , де  $\alpha$  — параметр регуляризації:

$$I = \varepsilon^m \varepsilon = (Y - X^*)^T (Y - X^*) + \alpha \hat{\beta}^T \hat{\beta}. \quad (3.9)$$

Тоді з умови

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\beta}} = 0 = 2(X^{*T} X^* \hat{\beta} - X^{*T} Y + \alpha \hat{\beta}),$$

отримаємо                      занижену                      регуляризовану                      оцінку  
 $\hat{\beta} = (X^{*T} X^* + \alpha I)^{-1} X^{*T} Y.$

Зіставляючи (3.7) і (3.9), бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює  $\text{diag } \sigma_i^2 \cdot M$ .

### 3.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація

У цьому методі [1, 2] знаходяться МНК-оцінки за зваженими  $U^{-1}$  (відфільтрованими) даними:

$$\hat{X}^{-1} = U^{-1}X, \quad \hat{Y} = U^{-1}Y,$$

що еквівалентно мінімізації функціонала

$$I = 0,5 \sum_{j=1}^M \|y(j) - x(j)\hat{\beta}\|^2 Q^{-1}, \quad (3.10)$$

де  $Q$  — матриця ваги кожного  $j$ -го виміру:  $Q = (\text{cov } \hat{\beta}) \cdot U^T$ .

Тоді зважена вагою  $Q^{-1}$  оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (3.10), дорівнює:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} Y. \quad (3.11)$$

Коваріація оцінки (3.11):

$$\text{cov } \hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T M \{N_y N_y^T\} Q^{-1} X (X^T Q^{-1} X)^{-1}.$$

Оцінка (3.11) має мінімальну дисперсію за умови, що

$$Q = M \{N_y N_y^T\},$$

тоді

$$\text{cov } \hat{\beta} = [X^T M \{N_y N_y^T\} X]^{-1}.$$

Для некорельованого білого шуму в вимірах  $Y$  матриця  $Q = \sigma_y^2(j)I$ . Тоді рекурентна формула УМНК збігається із звичайним МНК:

$$\hat{\beta}(j+1) = \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j) \left( \frac{1}{\sigma_{y(j)}^2} \right) [y(j) - X^T(j)\hat{\beta}(j)], \quad (3.12)$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j) [X^T(j)P(j)X(j) + \sigma_y^2(j)]^{-1} X^T(j)P(j).$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці  $Q^{-1}$  призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (3.11), (3.12). Тобто, алгоритм не є робастним [2]. Статистична незначна неадекватність матриці  $Q$  коваріації перешкод  $N_y$ , викликана, наприклад, окремими збоями в даних, які утворюють в законі розподілення перешкод  $N_y$  так звані «тяжкі хвости» [2], при оцінюванні вектора

$\hat{\beta}$  за алгоритмом (3.11) може привести до суттєвої помилки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

— на першому етапі відбувається виявлення та виправлення аномальних даних та квазіоптимальне оцінювання сигналів  $X$ ,  $Y$  шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок  $X(j)$ ,  $Y(j)$ ,  $j = \overline{1, M}$  ;

— на другому — МНК-оцінювання вектора  $\hat{\beta}$  за отриманими на першому етапі оцінками  $\hat{X}$  і  $\hat{Y}$  точних значень  $X^*$ ,  $Y^*$  сигналів.

Для такого підходу перешкоди  $N_{X\epsilon}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $N_y$  можуть бути взаємкорельованими. Окрім того, оскільки модель (3.1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних  $X_i(t)$ ,  $Y(t)$  одним лінійним фільтром, невідповідність згладжених значень  $\hat{X}^*$  і  $\hat{Y}^*$  істинним  $X^*$ ,  $Y^*$  не приводить до зміщення оцінки  $\hat{\beta}$  відносно  $\beta^*$ . Дійсно, знак рівності в рівнянні (3.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра  $W_\phi$ :

$$W_\phi\{Y^*\} = W_\phi\{X^*\beta^* + \epsilon^*\} = W_\phi\{X^*\}\beta^* + W_\phi\{\epsilon^*\}. \quad (3.13)$$

Математичне сподівання оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$M(\hat{\beta}) = \left[ \hat{X}^{*T} \hat{X}^* + M\{\hat{N}_x \hat{N}_x^T\} \right]^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*.$$

Якщо для спрощення прийняти що  $M(\hat{N}_x \hat{N}_x^T) = \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} I$ , а також покласти, що власні числа матриці  $(\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\}$  менше одиниці, то вираз  $\left[ I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} \right]^{-1}$  можна подати рядом. Тоді:

$$\begin{aligned} (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*) \hat{\beta} &= \left[ I + (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} \right]^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* \equiv \\ &\equiv \left[ I - (\hat{X}^{*T} \hat{X}^*)^{-1} \text{diag}\{\sigma_{N_i}^2\} \right] \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*. \end{aligned}$$

Звідси

$$\hat{\beta} \equiv \left[ \left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^* - \left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)^{-2} \text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \right]^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що :

$$\beta \equiv \left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)^{-1} \hat{X}^{*T} \hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta \hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \} \left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)^{-1} \hat{\beta}^*. \quad (3.14)$$

Оскільки норма  $\Delta \hat{\beta}$  не більше добутку норм складових правої частини рівняння (3.14), то справедлива нерівність:

$$\frac{\|\Delta \hat{\beta}\|}{\|\hat{\beta}^*\|} \leq \|\text{diag} \{ \sigma_{N_i}^2 \}\| \cdot \|\hat{X}^{*T} \hat{X}^*\|^{-1}. \quad (3.15)$$

Що сильніша фільтрація  $X$ ,  $Y$  оператором  $W_\Phi$  фільтра, то менша норма матриці збурень  $\sigma_{N_i}^2$ . Тобто фільтр заглушує перешкоди, не порушуючи рівняння (3.13). Але згладжування фільтром складових  $X_i(t)$  вектор-функції  $X(t)$  звужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленої матриці  $\left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)$  і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці  $\left( \hat{X}^{*T} \hat{X}^* \right)^{-1}$ . Тому для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжувального ефекту фільтра  $W_\Phi$ , за якого норма зміщення (3.15) буде мінімальною.

Коваріація оцінки  $\hat{\beta}$  за методом УМНК при допущенні взаємонекорельованості перешкод, подібна до МНК (3.8), але матриці  $M\{\varepsilon \varepsilon^T\}$ ,  $M\{N_y N_y^T\}$  вже не діагональні. Чим далі рознесено спектри сигналу і перешкоди, то краща фільтрація і, відповідно, оцінки квазіоптимального УМНК.

### 3.3. Інтегрований МНК в задачі ідентифікації ЕТО

#### 3.3.1. Загальні положення

МНК- і УМНК-оцінки попередніх методів знаходяться як координата точки мінімуму відповідних функціоналів  $\varepsilon^T \varepsilon$  і  $\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}$ . Оскільки функціонал є усередненим на кінцевому інтервалі  $T$  значен-

ням квадрата  $\epsilon$  чи  $\hat{\epsilon}$ , які є сумішшю корисного сигналу  $Y^* - X^*\beta$  і випадковою збурення  $N_y - N_x\beta$ , то він як функція від  $\beta$  не є точним.

Відомо, що операція диференціювання  $\frac{\partial}{\partial \beta}(\epsilon^T \epsilon)$  зашумленої

функції  $\epsilon^T \epsilon$  є некоректною. Цим обумовлена невисока точність МНК-оцінок на коротких сильно зашумлених вибірках даних  $X, Y$ . УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню перешкод в  $X, Y$ . Але на коротких вибірках впливає на точність фільтрації невизначеність граничних умов. Окрім цього згладжування зменшує обумовленість матриці  $\hat{X}^T \hat{X}$ , що еквівалентне зменшенню крутості функціонала. Тоді знову зростає область невизначеності  $G$  оцінки  $\hat{\beta}$ . Бажано зменшити розкид значень функціонала, не зменшуючи його кривизни в зоні екстремуму. Це можливо зробити для незгладжених  $X, Y$  шляхом додаткового усереднення по множині квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньоквадратичного для точних даних. Такими функціоналами можуть бути зсунуті у часі  $t$  на інтервал  $\theta$  середні добутки  $\frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(t) \epsilon(t+\theta) dt$ . Усереднюючи їх на інтервалі  $[-\tau_1, \tau_1]$ , отримаємо критерій:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\tau_2}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \epsilon(t) \epsilon(t+\theta) dt d\theta, \quad (3.16)$$

де  $\eta(\theta)$  — функція ваги, в найпростішому вигляді одинична.

Необхідна умова мінімуму  $I$  за  $\beta_k, k = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \beta_k} &= \frac{1}{2} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[ \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial \beta_k} \epsilon(t+\theta) + \epsilon(t) \frac{\partial \epsilon(t+\theta)}{\partial \beta_k} \right] dt d\theta = \\ &= \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \eta(\theta) \int_0^T (-x_k(t)) \left[ y(t+\theta) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t+\theta) \right] dt + \\ &+ (-x_k(t+\theta)) \left[ y(t) - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i(t) \right] dt = 0, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Із виразу (3.17) випливає система нормальних рівнянь:

$$A \cdot \hat{\beta} = B, \quad (3.18)$$

де  $A$  — матриця  $n \times n$  з елементами  $a_{ik}$ ;  $B$  — матриця-стовпчик  $n \times 1$  з елементами  $b_k$ ;

$$a_{ik} = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T [(x_i(t+\theta))x_k(t) + x_i(t)x_k(t+\theta)] dt d\theta,$$

$$b_k = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T [(y_i(t+\theta))x_k(t) + y(t)x_k(t+\theta)] dt d\theta.$$

Для дискретних у часі  $t$  вибірок інтеграли замінимо відповідними сумами. Тоді:

$$a_{ik} = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(x_i(j+l))x_k(j) + x_i(j)x_k(j+l)],$$

$$b_k = \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M [(y(j+l))x_k(j) + y(j)x_k(j+l)].$$

Розв'язок системи (3.18) дає шукану оцінку  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = A \cdot B. \quad (3.19)$$

### 3.3.2. Аналіз складових методу

Проаналізуємо наскільки ця оцінка відрізняється від істинної  $\beta^*$  [див. рівняння (3.2)]. Для цього спочатку розглянемо одну зі складових інтеграла (3.16), поданого сумою

$$I_e = \frac{1}{2} \sum_{l=-p}^p \eta(l) \sum_{j=1}^M \varepsilon(j) \varepsilon(j+l), \quad (3.20)$$

наприклад, якщо  $l = -m$ .

Тобто зсув  $\tau = -m\Delta t$ , де  $\Delta t$  — крок дискретності вимірів  $X$ ,  $Y$  у часі  $t$ . Тоді, без урахування ваги  $\eta(m)$ , складова дискретної моделі інтегрокореляційного критерію (3.20) дорівнюватиме:

$$I_m = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon_{-\tau} = \frac{1}{2} (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^T (Y_{-\tau} - X_{-\tau} \hat{\beta}) =$$

$$= \frac{1}{2} Y_0^T Y_{-\tau} - \frac{1}{2} \hat{\beta}^T (X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2} \hat{\beta}^T X_0^T X_{-\tau} \hat{\beta}, \quad (3.21)$$

де індекс  $-\tau$ , означає зсув  $x_i(t)$ ,  $y(t)$  на  $\tau = m\Delta t$ .



$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) \dots x_n(1) \\ x_1(2) \dots x_n(2) \\ \dots \\ x_1(M-m) \dots x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) \dots x_n(m+1) \\ x_1(m+2) \dots x_n(m+2) \\ \dots \\ x_1(M) \dots x_n(M) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \dots \\ y(M) \end{bmatrix}.$$

Якщо зсув  $\tau$  більше часу кореляції перешкод  $N$  і  $\hat{\epsilon}$ , то математичне сподівання  $I_m$  (3.21) буде інваріантне до цих перешкод.

$$M\{I_m\} = \frac{1}{2} \epsilon_0^{*T} \epsilon_{-\tau}^*.$$

Необхідна умова мінімуму  $I_m$ :

$$\frac{\partial I_m}{\partial \hat{\beta}^T} = -\frac{1}{2} (X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) + \frac{1}{2} (X_0^T Y_{-\tau} + X_{-\tau}^T Y_0) \hat{\beta} = 0, \quad (3.22)$$

достатня умова

$$\frac{1}{2} \det(X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0) > 0. \quad (3.23)$$

На відміну від МНК, для додатної визначеності матриці  $X_0^T X_{-\tau} + X_{-\tau}^T X_0$  в (3.23) недостатньо лінійної незалежності функції  $x_i(k)$ . Визначимо верхню границю  $\tau_{rp}$  для зсуву  $\tau$ , за якого нерівність (3.23) перетворюється в рівність, тобто система стає виродженою.

Оскільки перешкода  $N$  лише покращує обумовленість матриці  $X^T X$ , то при виведенні  $\tau_{rp}$  братимемо  $N = 0$ ,  $X = X^*$ . Подамо  $X_{-\tau}^*$  рядом Тейлора:

$$X_{-\tau}^* = X_0^* X - \tau_0 \dot{X}_0^* + R_1(\ddot{X}_0^*), \quad (3.24)$$

де  $\dot{X}_0^* = \frac{d}{dt} X_0^*$ ,  $\ddot{X}_0^* = \frac{d^2}{dt^2} X_0^*$ ,  $R_1(\ddot{X}_0^*)$  — матриця залишкових членів

в розкладенні (3.24). З точністю до  $R_1(\ddot{X}_0^*)$  маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(X_0^{*\top} X_{-\tau}^*) + X_{-\tau}^{*\top} X_0^* &\doteq \frac{1}{2} [X_0^{*\top} (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*) + (X_0^* - \tau \dot{X}_0^*)^\top X_0^*] = \\
&= X_0^{*\top} X_0^* \frac{\tau}{2} (X_0^{*\top} \dot{X}_0^* + \dot{X}_0^{*\top} X_0^*) = \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

де  $\Gamma, \Gamma_1$  — симетричні матриці:  $\Gamma$  — матриця Грама, вона додатно визначена.

Відомо, що дві симетричні матриці, з яких одна додатно визначена перетворенням  $T$ , можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці  $\Gamma$  будуть всі одиниці, а на діагоналі  $\Gamma_1$  — власні значення  $\lambda_i$  матриці  $\Gamma^{-1}$  (для виразу (3.25) —

$$\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma_1):$$

$$T^{-1} \left( \Gamma - \frac{\tau}{2} \Gamma_1 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_{1n} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Граничне значення  $\tau_{\text{гп}}$  зсуву визначається за умови:

$$\begin{aligned}
I - \frac{\tau_p}{2} \max \lambda_{li} &= 0, \text{ або} \\
\tau_{\text{гп}} &= \frac{2}{\max \lambda_{li}},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

де  $\lambda_{li}$  — власні значення матриці  $\frac{\tau}{2} \Gamma^{-1} \Gamma$ .

Зрозуміло, що чим більше  $\tau$ , то гірше обумовлена матриця  $\Gamma$  (більше  $\|\Gamma^{-1}\|$ ), то більше  $\max \lambda_{li}$  і, як наслідок, менший граничний зсув  $\tau_{\text{гп}}$ . Розглянемо, як вплине симетрія зсуву  $\pm \tau$  на граничне значення. Тут

$$\begin{aligned}
I = \varepsilon_0^\top (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) &= (Y_0 - X_0 \hat{\beta})^\top (Y_\tau + Y_{-\tau} - (X_\tau + X_{-\tau}) \hat{\beta}) = Y_0^\top (Y_\tau + \\
&+ Y_{-\tau}) - \hat{\beta}^\top [X_0^\top (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^\top Y_0] + \hat{\beta}^\top X_0^\top (Y_\tau + Y_{-\tau}) \hat{\beta},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \dots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \dots & x_n(m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-m) & \dots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

де

$$X_{\tau} = \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \cdots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \cdots & x_n(2m+2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M) & \cdots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y_{\tau} = \begin{bmatrix} y(2m+1) \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix},$$

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(M-2m) & \cdots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}, \tau = m.$$

Необхідна умова мінімуму  $I$

$$\frac{\delta I}{\delta \beta^T} = \left[ X_0^T (Y_{\tau} + Y_{-\tau}) + (X_{\tau} + X_{-\tau})^T Y_0 \right] + \\ + \left[ X_0^T (Y_{\tau} + X_{-\tau}) + (X_{\tau} + X_{-\tau})^T X_0 \right] \hat{\beta} = 0.$$

Достатня умова мінімуму  $I$

$$\det \frac{\delta I}{\delta \beta^T \delta \beta} = \left| X_0^T (X_{\tau} + X_{-\tau}) + (X_{\tau} + X_{-\tau})^T X_0 \right| > 0. \quad (3.29)$$

Аналогічно висновку (3.27) знайдемо граничне  $\tau_{\text{гр}}$  із умови, що у формулі (3.29) визначник дорівнює нулю. Розглянемо вже три члени ряду (3.24):

$$X_{\tau}^* = X_0^* + \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, \tau), \quad (3.30)$$

$$X_{-\tau}^* = X_0^* - \tau \dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2} \ddot{X}_0^* + R_3(\ddot{X}^*, -\tau).$$

З точністю до  $R_3(\ddot{X}, \pm\tau)$ , отримуємо

$$X_0^{*T} (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*) + (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* \approx \\ \approx X_0^{*T} X_0^* + \frac{\tau^2}{4} [X_0^{*T} \ddot{X}_0^* + X_0^{*T} X_0^*] = \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2, \quad (3.31)$$

де  $\Gamma$  і  $\Gamma_2$  — подібні матриці до рівняння (3.26);  $\Gamma$  — додатно-визначена матриця Грама.

Тоді як і рівняння (3.26), вираз (3.31) приводиться перетворенням  $T$  до вигляду:

$$T^{-1} \left( \Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right) T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{2i} & 0 \\ 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

де  $\lambda_{2i}$  — власні значення матриці  $\frac{\tau^2}{4} T^{-1} \Gamma_2$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Граничне значення зсуву  $\tau_{\text{гр}}$  визначатиметься з умови

$$1 + \frac{\tau_{\text{гр}}^2}{4} \max |\lambda_{2i}| = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\sqrt{\max |\lambda_{2i}|}}, \quad (3.32)$$

де  $\max |\lambda_{2i}|$  береться за множиною  $\{\lambda_{2i}\}$  від'ємних власних значень матриці  $\frac{\tau^2}{4} T^{-1} \Gamma_2$  на відміну від (3.27) для несиметричного зсуву.

Якщо продовжити розкладання (3.30) і підставити його в (3.29), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (3.29) скоротяться.

Таким чином, для точних  $X^*$  матриця

$$X_0^{*\text{T}} (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*) + (X_{\tau}^* + X_{-\tau}^*)^{\text{T}} X_0^*$$

відрізняється від матриці  $X_0^{*\text{T}} X_0^*$  МНК лише парними членами розкладання (3.30), ураховуючи припущення гладкості  $x_0(t)$ .

Можна очікувати, що ця різниця буде суттєво меншою, ніж у (3.23) для точних  $X^*$ , оскільки там присутні всі члени розкладання (3.30). Таким чином, граничне значення (3.32) більше, ніж за умовою (3.27), а при тому ж  $\tau$  показник (3.28) при неточних  $X = X^* + N$  ближче до показника МНК (при точних  $X^*$ ), ніж показник у рівнянні (3.21).

Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки  $\hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \left[ X_0^{\text{T}} (X_{\tau} + X_{-\tau}) + X_{\tau} + X_{-\tau} \right]^{\text{T}} X_0 \Big]^{-1} \times \\ & \times [X_0^{\text{T}} (Y_{\tau} + Y_{-\tau}) + (X_{\tau} + X_{-\tau})^{\text{T}} Y_0]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.3.3. Кількісні показники оцінки

Зсув  $\Delta\hat{\beta}$  :

$$\Delta\hat{\beta} = M\{\hat{\beta} - \hat{\beta}^*\} = M\left\{\left[X_0^T(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0\right]^{-1}\right\} \times \\ \times \left[X_0^T(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0\right] - \left[(X_0^{*T} X_0^*)^{-1} (X_0^{*T} Y_0^*)\right],$$

або

$$\Delta\hat{\beta} = M\left\{\left[X_0^T(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0\right]^{-1}\right\} \times \\ \times M\left\{\left[X_0^T(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0\right] - (X_0^{*T} X_0^*)^{-1} (X_0^{*T} Y_0^*)\right\} = \\ = \left[X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau + X_{-\tau})^T X_0^* + M\{N_0^T(N_\tau + N_{-\tau}) + \right. \\ \left. + (N_\tau + N_{-\tau})^T N_0\}\right]^{-1} X_0^T(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T Y_0 + \\ + M\left\{\left[X_0^{*T}(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^T \epsilon_0\right] - (X_0^{*T} X_0^*)^{-1} X_0^{*T} Y_0^*\right\}.$$

Скориставшись розкладанням (3.30) і формулою (3.31), отримаємо:

$$\Delta\hat{\beta} = \left[(4\Gamma + \tau^2\Gamma_2) + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1} \times \\ \times \left[4\left(X_0^{*T}Y_0^* + \tau^2\left(X_0^{*T}\dot{Y}_0^* + \ddot{X}_0^{*T}Y_0^*\right)\right) + 2(M - 2m) \times \right. \\ \left. \times (R_{X_\epsilon^*}(\tau) + R_{X_\epsilon^*}(-\tau))\right] - \Gamma^{-1}X_0^{*T}X_0^*,$$

де  $R_{NN}(\tau)$  — матриця  $(n \times n)$  кореляційних функцій  $R_{N_i N_j}(\tau)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $R_{X_\epsilon^*}(\pm\tau)$  — вектор-стовпчик  $(n \times 1)$  кореляційних функцій,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Зсув  $\Delta\hat{\beta}$  викликано членами  $(M - 2m) R_{NN}(\tau)$  і  $(M - 2m)[R_{X_\epsilon}(\tau) + R_{X_\epsilon}(-\tau)]$ . Член при  $\tau$  більшому часу кореляції перешкоди дорівнює нулю. Друга складова

$$(M - 2m)[R_{X_\epsilon}(\tau)] \approx \frac{\tau^2}{2} (X_0^{*T} \ddot{\epsilon}_0^* + \ddot{X}_0^{*T} \epsilon_0^*).$$

Тоді

$$\Delta \hat{\beta} = \left( 2\Gamma + \frac{\tau^2}{4} \Gamma_2 \right)^{-1} (M - 2m) (R_{x\epsilon}(\tau) + R_{x\epsilon}(-\tau)).$$

Звідси бачимо, що зсув  $\Delta \hat{\beta}$  зменшився, якщо виконується нерівність

$$\left( \frac{M - 2m}{M - m} \right) \left\| \left( 2\Gamma + \frac{\tau^2}{2} \Gamma_2 \right)^{-1} \right\| < \left\| (2\Gamma - \tau \Gamma_1)^{-1} \right\|, \quad (3.34)$$

або за того ж зміщення  $\Delta \hat{\beta}$  оцінки  $\hat{\beta}$ , граничне  $\tau_{\text{гр}}$  зросло.

**Оцінка дисперсії оцінки (3.33)  $\hat{\beta}$ :**

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ \left( \hat{\beta} - M \{ \hat{\beta} \} \right) \left( \hat{\beta} - M \{ \hat{\beta} \} \right)^T \right\}.$$

Подано  $\hat{\beta}$  із рівняння (3.33) так:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) + \right. \\ & \left. + \xi(X^*, N, \tau) \right]^{-1} \left[ (X_0^m + N_0^T) (Y_\tau^* + \epsilon_\tau + Y_{-\tau}^* + \epsilon_{-\tau}) + \right. \\ & \left. + (X_\tau^* + N_\tau + X_{-\tau}^* + N_{-\tau})^T (Y_0^* + \epsilon_0) \right]. \end{aligned}$$

За великих  $M$ , нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами  $\left[ N_0^T (\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau}) (N + N_{-\tau})_{\epsilon_0} \right]$  другого порядку малості, позначивши:

$$\begin{aligned} C_1' &= \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_0^{*m}; \\ C_1'' &= \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_{-\tau}^{*m}; \\ C_1''' &= \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} X_\tau^{*m}; \\ C_2' &= \left[ X_0^m (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m) R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_0^*; \end{aligned}$$

$$C_2'' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_{-\tau}^*;$$

$$C_2''' = \left[ X_0^{*m} (X_\tau^* + X_{-\tau}^*) + (X_\tau^* + X_{-\tau}^*)^T X_0^* + 4(M - 2m)R_{NN}(\tau) \right]^{-1} Y_\tau^*,$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &\equiv M \left\{ \left[ C_1'(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau}) + (C_2'' + C_1''')\epsilon_0 + C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + (C_2'' + C_2''')N_0 \right] \times \right. \\ &\quad \times \left. C_1'(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau}) + (C_1'' + C_1''')\epsilon_0 + C_2'(N_\tau + N_{-\tau}) + (C_2'' + C_2''')N_0 \right\}^T = \\ &= C_1' M \left\{ (\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})^T \right\} C_1'^T + C_1' M \left\{ (\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})\epsilon_0^T \right\} \left\{ (C_1'' + C_1''')^T + \right. \\ &\quad \left. + (C_1'' + C_1''')M(\epsilon_\tau \epsilon_{-\tau})^T \right\} C_1'^T + C_1' M \left\{ (N_\tau + N_{-\tau})N_0^T \right\} (C_1'' + C_1''')^T + \\ &\quad + (C_1'' + C_1''')M \left\{ N_0(N_\tau + N_{-\tau}) \right\}^T C_1'^T + (C_1'' + C_1''')M \left\{ N_0 N_{\tau 0}^T \right\} (C_1'' + C_1''')^T \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &= C_5' \left[ M \left\{ (\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})^T \right\} + 2M \left\{ (\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})\epsilon_0^T + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2M \left\{ \epsilon_0(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})^T \right\} + M \left\{ \epsilon_0 \epsilon_{\tau 0}^T \right\} C_5'^T \right] + C_6' M \left\{ N_0(N_\tau + N_{-\tau})^T \right\} + \right. \\ &\quad \left. + M \left\{ N_0 N_{\tau 0}^T \right\} C_6'^T = C_5 Q_3 C_5'^T + C_6 F_3 C_6'^T, \end{aligned} \quad (3.35)$$

де  $C_1' \approx C_1'' \approx C_1''' = C_5$ ,  $C_2' \approx C_2'' \approx C_2''' = C_6$ .

Враховуючи співвідношення (3.34), для  $|\tau| > 0$  можна сподіватися, що  $\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|$ ,  $\|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|$ , тоді як

$$\|Q_3\| = \|Q_2\|, \|F_3\| = \|F_2\|.$$

Унаслідок того, що в (3.35) має місце співвідношення діагональних і нільпонтентних матриць, тому при рівних  $\tau$  зсув і коваріація оцінок  $\hat{\beta}$  при  $\pm\tau$  буде менше, ніж для  $-\tau$ . Тобто симетричний зсув наближає критерії  $\epsilon_0^T(\epsilon_\tau + \epsilon_{-\tau})$  до ідеального  $\epsilon_0^{*\Gamma} \epsilon_0^*$ .

Таким чином, кожна  $m$ -та складова інтегрокореляційного критерію (3.20) у межах зсуву  $\pm m\Delta t = \pm\tau$ , меншого за модулем, ніж  $\tau_{\text{гр}}$  (3.32), при її мінімізації дає оцінку  $\hat{\beta}$  (3.33), близьку до істинної  $\beta^*$ , якщо зсув  $\tau$  більший ніж час  $T_{\text{кор}}$  кореляції перешкод і менший ніж граничний  $\tau_{\text{гр}}$ .

### 3.3.4. Рекурентна форма обчислення

Розглянемо рекурентну форму обчислення за критеріями (3.21) і (3.28) для  $M$  вимірів кроком  $\Delta t$ , тобто,  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = \overline{1, M}$ ,

$$I = \sum_{k=1}^M \left[ y(k) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k) \right] \left[ y(k+m) - \sum_{i=0}^n \hat{\beta}_{i2} x_i(k+m) \right].$$

З умови (3.22) отримаємо систему :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \left[ y(k) x_j(k+m) + y(k+m) x_j(k) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \sum_{k=1}^M \left[ x_i(k) x_j(k+m) + x_j(k+m) x_i(k) \right], j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

або у векторній формі :

$$\hat{\beta} = X^T Y_m + X_m^T Y_0.$$

Позначимо

$$P = \left[ X_0^T X_m + X_m^T X_0 \right]^{-1}. \quad (3.36)$$

Тоді

$$\hat{\beta}_2 = P \left( X^T Y_m + X_m^T Y_0 \right). \quad (3.37)$$

Подамо рівняння (3.36) в блочному вигляді для  $(k+1)$ -го виміру:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \left[ X_{0k}^T X_{mk} + X_{mk}^T X_{0k} \right]^{-1} = \left[ \left[ X_{0(k-1)}^T X_{m(k-1)} + X_{m(k-1)}^T X_{0(k-1)} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left[ x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T \right] \right]^{-1} = \left[ P_k^{-1} + \left[ x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T \right] \right]^{-1}, \\ x_{0k}^T &= \left[ x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k) \right], \end{aligned}$$

де

$$x_{mk}^T = \left[ x_1(k+m), x_2(k+m), \dots, x_n(k+m) \right]. \quad (3.38)$$

Із рівняння (3.38) знайдемо, що

$$P_{k+1}^{-1} - P_k^{-1} = x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T. \quad (3.39)$$

Тоді для  $k$ -го виміру отримуємо  $\hat{\beta}$  (3.37):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k+1) &= P_{k+1} \left( X_{0(k-1)}^T Y_{mk} + X_{mk}^T Y_{0k} \right) = \\ &= P_{k+1} \left[ X_{0k}^T, x_{0k} \right] \begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} \\ y(k+m) \end{bmatrix} + \left[ X_{m(k-1)}^T, x_{mk} \right] \begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ y(k) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= P_{k+1} \left[ P_k^{-1} \hat{\beta}(k) + x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) \right] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1}) \hat{\beta}(k) \right]. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Із формули (3.40), враховуючи (3.39), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}(k+1) &= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) - \right. \\
&\quad \left. - (x_{0k} x_{mk}^T + x_{mk} x_{0k}^T) \hat{\beta}_2(k) \right] = \\
&= \hat{\beta}(k) + P_{k+1} \left[ x_{0k} \varepsilon(k+m) + x_{mk} \varepsilon(k) \right],
\end{aligned}$$

де  $P_{k+1}$  — визначено згідно з рівнянням (3.38),  $\varepsilon(e) = y(e) - x_e^T \beta(e)$ ,  $e = k, k+m$ .

Для критерію (3.28), з умови мінімуму, отримаємо систему:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \left[ \left( y(k+m) + y(k-m) x_j(k) + y(k) \right) \left( x_j(k+m) + x_j(k-m) \right) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_i \left[ \left( x_i(k+m) + x_i(k-m) \right) x_j(k) + x_i(k) \left( x_j(k+m) + x_j(k-m) \right) \right]
\end{aligned}$$

або у векторній формі:

$$\left[ X_0^T Z + Z^T X_0 \right] \hat{\beta} = X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0,$$

де  $Z = X_m + X_{-m}$ .

Позначимо:

$$\left[ X_0^T Z + Z^T X_0 \right]^{-1} = P.$$

Тоді

$$\hat{\beta} = P \left[ X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0 \right].$$

### 3.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК

В умовах невизначеності характеристик збурень  $N_x$  і  $N_y$  вибір вагової функції  $\eta(m)$  функціонал (3.16) слід виконувати за зовнішнім (головним) показником  $I$ . Знаходитимемо  $\eta(m)$  у класі симетричних відносно  $m = 0$  фінітних функцій (таких, що  $\eta(0) = \eta(\pm m) = 0$ ), наприклад такого вигляду:

$$\eta(m) = \eta(m, \gamma, \theta) = (1 + |m|)^{\theta} \left( 1 - \cos \frac{|\pi m|}{m_{\text{кр}}} \right)^{\gamma},$$

де  $\theta \in (\pm\infty)$ ,  $\gamma \in (0, \infty)$ ,  $m_{\text{кр}}$  визначається за умови (3.32), параметри  $\theta$  і  $\gamma$  оптимізуються (у системах класу БАСІ) за головним показником  $I$ . Параметр  $\gamma$  впливає на ширину імпульсу  $\eta(m)$ , а  $\theta$  — на його асиметрію відносно максимуму (рис. 3.1).

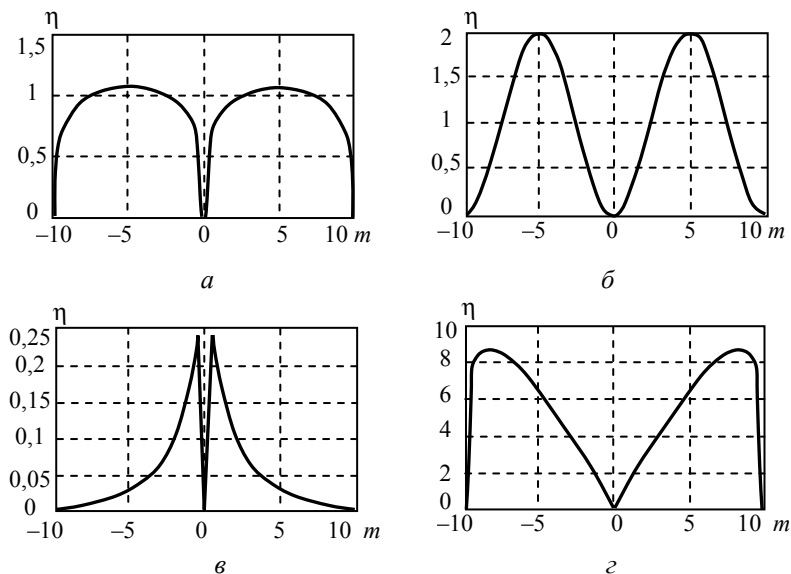


Рис. 3.1. Залежність  $\eta(m, \theta, \gamma)$ :  
 $a$  —  $\theta = 0, \gamma = 0,1$ ;  $б$  —  $\theta = 0, \gamma = 1$ ;  
 $в$  —  $\theta = 2, \gamma = 0,1$ ;  $г$  —  $\theta = 2, \gamma = 0,1$

Якщо,  $\gamma \rightarrow 0$ , то  $\eta(m)$  прямує до прямокутного імпульсу; якщо  $\gamma \rightarrow \infty$ , то  $\eta(m)$  — до  $\delta$ -функції Дірака, маємо оцінку (3.33); якщо  $\theta \rightarrow 0$ , то імпульси  $\eta(m)$  симетричні відносно їх максимумів; якщо  $\theta \rightarrow \infty$ , то імпульс  $\eta(m)$  наближається до  $m = 0$ , а метод до МНК; якщо  $\theta \rightarrow -\infty$ , то маємо оцінку (3.33) для  $m = m_{\text{кр}}$ . Змінюючи  $\delta$  і  $\gamma$ , за умови екстремуму  $I$  можна забезпечити оптимальність оцінки (3.19) інтегрованого МНК.

### 3.3.6. Тестування ІМНК

Для тестування ІМНК згенеруємо множину вхідних та вихідних значень моделі  $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$  для 1000 вимірів, які представлені в табл. 3.1 та на рис. 3.2,

$$\text{де } \beta_0 = 0; \beta_1 = \beta_2 = 1; t = k\Delta t (k - \overline{I, N}); N = 100_0; \Delta t = \frac{T}{100_0};$$

$$x_1(t) = \sin \omega t; x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi); \omega = \frac{2\pi}{T}; \varphi \approx 30^\circ.$$

Таблиця 3.1

**Вхідні та вихідні значення істинних змінних моделі**

$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$$

№	$x_1$	$x_2$	$y$
1	0,006130589	0,50529985	0,511430439
2	0,012222672	0,510547794	0,522770466
3	0,018314301	0,515776789	0,53409109
4	0,02440525	0,52098664	0,545391889
5	0,030495293	0,526177153	0,556672446
6	0,036584204	0,531348137	0,567932341
7	0,042671757	0,536499399	0,579171156
8	0,048757727	0,541630748	0,590388475
9	0,054841887	0,546741993	0,60158388
10	0,060924011	0,551832945	0,612756956
11	0,006130589	0,50529985	0,511430439
	...	...	...
991	-0,249072171	0,268539636	0,019467465
992	-0,243167238	0,274403184	0,031235946
993	-0,237253279	0,280256547	0,043003268
996	-0,231330514	0,286099508	0,054768995
995	-0,225399163	0,29193185	0,066532688
996	-0,219459445	0,297753357	0,078293912
997	-0,213511582	0,303563812	0,09005223
998	-0,207555795	0,309363	0,101807205
999	-0,201592303	0,315150705	0,113558402
1000	-0,195621329	0,320926713	0,125305383

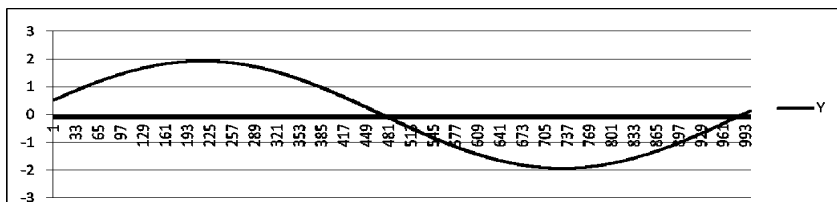


Рис. 3.1. Графік функції  $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$

Для дослідження ІМНК та підтвердження його ефективності використаємо порівняння з МНК. Відомо, що в реальних процесах на виміри вхідних та вихідних змінних діють шуми різного роду. Як експеримент розглянемо вибірки, де шум діє тільки на вхідні значення, тільки на вихідні значення та вхідні і вихідні значення одночасно.

### І. Шум діє на вхідні змінні $x_1$ та $x_2$

Накладемо на вхідні значення  $x_1$  та  $x_2$  білий шум, прикладом якого є випадкові числа з діапазону  $[-1; 1]$  з рівномірним розподілом (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Значення змінних моделі  $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$

з білим адитивним шумом, що діє на  $x_1$  та  $x_2$

№	$e_{x1}$	$e_{x2}$	$x_1 + e_{x1}$	$x_2 + e_{x2}$	$y$
1	-0,41719	0,949403	-0,4111	1,4547	0,51143
2	0,875793	-0,4579	0,88802	0,05265	0,52277
3	-0,71408	-0,2781	-0,6958	0,23768	0,53409
4	0,815052	0,242853	0,83946	0,76384	0,54539
5	-0,30516	-0,97741	-0,2747	-0,4512	0,55667
6	0,362804	0,163437	0,39939	0,69478	0,56793
7	-0,13308	-0,24138	-0,0904	0,29512	0,57917
7	0,903913	0,528349	0,95267	1,06998	0,59039
...					
993	-0,19056	-0,75164	-0,4219	-0,4655	0,05477
994	-0,98983	0,295577	-1,2152	0,58751	0,06653
995	-0,00093	0,299251	-0,2204	0,597	0,07829
996	0,298976	-0,57053	0,08546	-0,267	0,09005
997	0,221154	0,098728	0,0136	0,40809	0,10181
998	-0,66375	-0,24225	-0,8653	0,0729	0,11356
999	0,801179	0,44741	0,60556	0,76834	0,12531
1000	-0,10431	0,155221	-0,294	0,48191	0,13705

Застосуємо для вибірки (табл. 3.2) методи ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів.

Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення розроблене згідно алгоритму ІМНК.

Коефіцієнти вагової функції було обрано з врахуванням типу шуму, тобто білому шумі:  $\theta = -2, \gamma = 0,1$  Графік вагової функції  $\eta(l, \theta, \gamma)$  представлено на рис. 3.3.

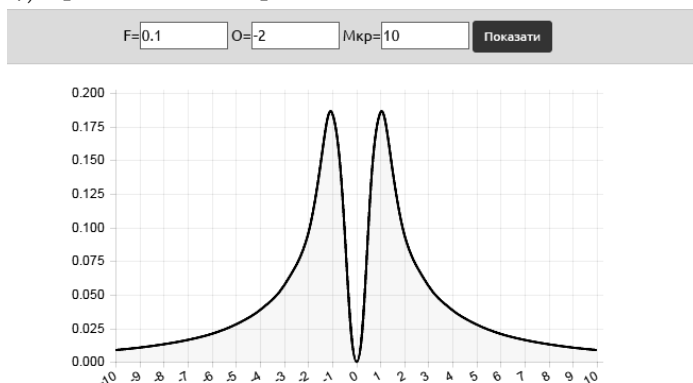


Рис. 3.3. Графік вагової функції  $\eta(l, -2, 0, 1)$

У результаті проведених обчислень за методом ІМНК отримано наступні оцінки параметрів:

$$\hat{\beta}_0 = 0, \hat{\beta}_1 = 0,98, \hat{\beta}_2 = 1,05.$$

Отже, згідно обчислень за допомогою ІМНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = 0,98x_1(t) + 1,05x_2(t),$$

де оцінки 0,98 і 1,05 близькі до істинних одиничних.

Для застосування методу МНК використаємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel.

У результаті застосування методу МНК в середовищі MS Excel, отримано наступні оцінки моделі:

$$\hat{\beta}_0 = 0,0228; \hat{\beta}_1 = 0,7641; \hat{\beta}_2 = 0,7576.$$

Згідно розрахунків методом МНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = 0,02 + 0,76 x_1(t) + 0,75 x_2(t),$$

де оцінки 0,76 і 0,75 суттєво занижені відносно істинних одиничних.

## II. Шум на виміри вхідних значень $x_1$ , $x_2$ та вихідних значень $y$

Розглянемо випадок, за якого на вхідні значення  $x_1$ ,  $x_2$  та вихідне значення  $y$  моделі діє білий шум, прикладом якого є випадкові числа з діапазону  $[-1; 1]$  з рівномірним розподілом (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Значення шумів за відповідних змінних з шумами

№	$e_{x1}$	$e_{x2}$	$e_y$	$x_1 + e_{x1}$	$x_2 + e_{x2}$	$y + e_y$
1	0,03523	0,43416	0,88429	0,04136	0,93946	1,39572
2	0,91505	-0,32732	-0,26083	0,92727	0,18323	0,26194
3	-0,19748	0,10229	-0,95200	-0,1792	0,61807	-0,4179
4	0,26788	0,39887	0,88018	0,29229	0,91986	1,42557
5	0,62405	0,65983	0,01143	0,65454	1,18601	0,5681
6	-0,75662	-0,62205	-0,86077	-0,72	-0,0907	-0,2928
7	-0,73792	-0,12008	-0,09057	-0,6952	0,41641	0,4886
8	0,15370	0,21820	-0,52428	0,20246	0,75983	0,06611
9	0,35053	-0,90514	-0,50758	0,40537	-0,3584	0,094
10	-0,98164	-0,17513	-0,77603	-0,9207	0,3767	-0,1633
11	-0,62091	0,04270	0,87876	-0,5539	0,59961	1,50267
...	...	...	...	...	...	...
991	0,79511	-0,75669	-0,05716	0,55194	-0,4823	-0,0259
992	0,48254	0,97649	-0,82096	0,24529	1,25674	-0,778
993	-0,79569	0,30183	0,85004	-1,027	0,58793	0,9048
994	0,96817	-0,38296	0,68096	0,74277	-0,091	0,74749
995	0,49488	0,02347	0,53962	0,27542	0,32123	0,61792
996	0,48263	0,79136	-0,52786	0,26912	1,09493	-0,4378
997	0,13110	0,37606	-0,73095	-0,0765	0,68543	-0,6291
998	0,22330	-0,87892	0,10663	0,02171	-0,5638	0,22019
999	-0,45633	-0,31366	-0,13423	-0,6519	0,00727	-0,0089
1000	0,71854	0,44905	-0,41454	0,5289	0,77575	-0,2775

Застосуємо для вибірки (табл. 3.3) методи ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів.

Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення розроблене згідно алгоритму ІМНК.

Коефіцієнти вагової функції:  $\theta = -1, \gamma = 0,1$ . Графік вагової функції  $\eta(l, \theta, \gamma)$  представлено на рис. 3.4.

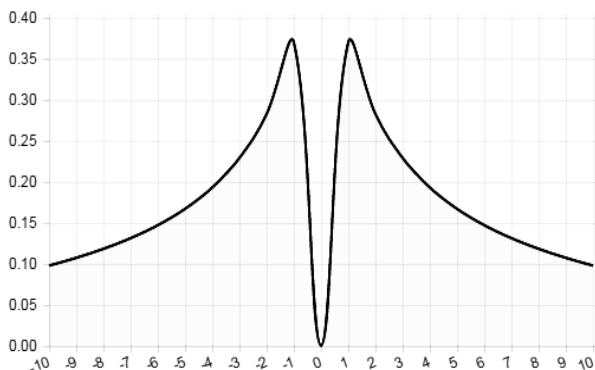


Рис. 3.4. Графік вагової функції  $\eta(l, -1, 0, 1)$

У результаті проведених обчислень отримано наступні оцінки параметрів за методом ІМНК:

$$\hat{\beta}_0 = 0, \hat{\beta}_1 = 0,99, \hat{\beta}_2 = 1,007.$$

Отже, згідно обчислених оцінок параметрів моделі за допомогою ІМНК отримали модель

$$\hat{y}(t) = 0,99x_1(t) + 1,007x_2(t)$$

з параметрами 0,99 і 1,007 близькими до одиничних.

Для застосування методу МНК використаємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel.

У результаті застосування методу МНК в середовищі MS Excel, отримано наступні оцінки моделі:

$$\hat{\beta}_0 = 0,0263; \hat{\beta}_1 = 0,7566; \hat{\beta}_2 = 0,7444.$$

Згідно розрахунків методом МНК отримали модель

$$\hat{y}(t) = -0,02 + 0,75x_1(t) + 0,74x_2(t)$$

із заниженими значеннями коефіцієнтів:  $0,75 < 1; 0,74 < 1$ .

На рис. 3.5 зображено графік функцій  $y$ .

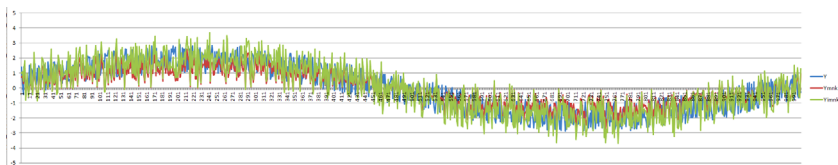


Рис. 3.5. Графік функцій  $y$ , при впливі на вхідні та вихідні значення білого шуму

### III. Шум діє тільки на вихідне значення $y$

Розглянемо випадок, коли на вихідне значення  $y$  моделі діє білий шум. Накладемо на  $y$  білий шум і розглянемо вибірку із 100 вимірів (табл. 3.4). Така ситуація відповідає вимогам до використання МНК.

Таблиця 3.4

Значення функції  $y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t)$  з білим шумом на  $y$

№	$e_y$	$x_1$	$x_2$	$y + e_y$
1	0,88429	0,04136	0,93946	1,39572
2	-0,26083	0,92727	0,18323	0,26194
3	-0,95200	-0,1792	0,61807	-0,4179
4	0,88018	0,29229	0,91986	1,42557
5	0,01143	0,65454	1,18601	0,5681
6	-0,86077	-0,72	-0,0907	-0,2928
7	-0,09057	-0,6952	0,41641	0,4886
8	-0,52428	0,20246	0,75983	0,06611
9	-0,50758	0,40537	-0,3584	0,094
93	0,85004	-1,027	0,58793	0,9048
94	0,68096	0,74277	-0,091	0,74749
95	0,53962	0,27542	0,32123	0,61792
96	-0,52786	0,26912	1,09493	-0,4378
97	-0,73095	-0,0765	0,68543	-0,6291
98	0,10663	0,02171	-0,5638	0,22019
99	-0,13423	-0,6519	0,00727	-0,0089
100	-0,41454	0,5289	0,77575	-0,2775

Застосуємо для вибірки (табл. 3.4) методи ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів.

Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення розроблене згідно алгоритму ІМНК.



Коефіцієнти вагової функції:  $\theta = -1, \gamma = 0,1$ . Графік вагової функції  $\eta(l, \theta, \gamma)$  представлено на рис. 3.4.

У результаті проведених обчислень отримано наступні оцінки параметрів за методом ІМНК:

$$\hat{\beta}_0 = 0, \hat{\beta}_1 = 0,97, \hat{\beta}_2 = 0,98.$$

Отже, згідно обчислених оцінок параметрів моделі за допомогою ІМНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = 0,97x_1(t) + 0,98x_2(t).$$

Для застосування методу МНК використаємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel.

У результаті застосування методу МНК в середовищі MS Excel, отримали наступні оцінки моделі:

$$\hat{\beta}_0 = 0,2173; \hat{\beta}_1 = 1,2398; \hat{\beta}_2 = 0,5625.$$

Згідно розрахунків методом МНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = -0,21 + 1,24 x_1(t) + 0,56 x_2(t).$$

Випадковий розкид коефіцієнтів за МНК

$$\Delta\beta_0 = 0,217 \text{ відносно } 0;$$

$$\Delta\beta_1 = 0,2239 \text{ відносно } 0;$$

$$\Delta\beta_2 = -0,563 \text{ відносно } 0.$$

суттєво більший за відповідного розкиду

$$\Delta\beta_0 = 0; \Delta\beta_1 = -0,03; \Delta\beta_2 = -0,02 \text{ в ІМНК.}$$

Таким чином, виходячи із проведених розрахунків та розглянутих прикладів, можна зробити висновок про ефективність використання інтегрованого методу найменших квадратів для оцінки параметрів моделі, заданої зашумленими даними, як за умови шумів в незалежних змінних, де МНК дає занижені оцінки, так і за умови шуму в залежній змінній, де МНК дає незміщені, але менш ефективні оцінки, ніж ІМНК.

### 3.4. Метод адаптивного одноразового ділення (МОД) в задачі оцінювання параметрів моделі ЕТО

### 3.4.1. Сутність методу

Даний метод можна розглядати як метод допоміжних змінних, в якому допоміжна змінна

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1)u_2(1)\dots u_n(1) \\ ..... \\ u_1(M)u_2(M)\dots u_n(M) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

має такий вигляд

$$u_{ij} = \begin{cases} x_i^{-1}(j), & |x_i^{-1}(j)| \geq \Delta_i; \\ 0, & |x_i^{-1}(j)| < \Delta_i, j = \overline{1, M}, \Delta_i > 0. \end{cases}$$

Система функцій  $\{x_i^{-1}(j)\}$  лінійно незалежна, так як за умовою система  $\{x_i(j)\}$  лінійно незалежна.

Згідно з методом допоміжних змінних, існує оцінка  $\hat{\beta}$ , яка може бути знайдена з рівняння

$$\begin{aligned} U^T Y &= U^T X \hat{\beta}, \\ \hat{\beta} &= (U^T X)^{-1} U^T Y, \end{aligned} \quad (3.42)$$

де

$$U^T X = \begin{bmatrix} M & \sum_{k=1}^M x_2(k) x_1^{-1}(k) & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_2^{-1}(k) & M & \cdots & \sum_{k=1}^M x_n(k) x_2^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M x_1(k) x_n^{-1}(k) & \sum_{k=1}^M x_2(k) x^{-1}(k) & \cdots & M \end{bmatrix},$$

$$U^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M y(k) x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_2^{-1}(k) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^M y(k) x_n^{-1}(k) \end{bmatrix}$$

і береться множина  $M$  відліків  $k$ , у яких виконується умова:

$$|x_j^{-1}(j)| \geq \Delta_i$$

### 3.4.2. Зміщення оцінок

Якщо перешкоди  $N_i$  не корелюють між собою, а також з  $X^*$ ,  $Y^*$  і малі, то, вважаючи наближено

$$x_i^{-1}(j) = x_i^{*-1}(j) - N_i(j),$$

неважко отримати, що оцінка  $\hat{\beta}$  для точної структури моделі, коли  $\epsilon^* = 0$ , буде незміщеною, оскільки  $M\{U^T X\} = U^{*T} X^*$ ,  $M\{U^T Y\} = U^{*T} Y^*$ . Зміщення  $\delta \hat{\beta}$  може мати місце для наближеної моделі, якщо  $\epsilon^* \neq 0$ :

$$\delta \hat{\beta} = (U^{*T} X^*)^{-1} U^{*T} \epsilon^*, \quad (3.43)$$

оскільки з умови  $X^{*T} \epsilon^* = 0$  у загальному випадку не впливає умова  $U^{*T} \epsilon^* = 0$ , хоча  $U^*$  та  $X^*$  зв'язані співвідношенням (3.41).

Зміщення (3.43) менше зміщення оцінок МНК через перешкоди  $N_i$  в  $X$ , якщо вплив  $\epsilon^* \neq 0$  з формули (3.43) менше впливу перешкод  $N$  на зміщення оцінок МНК.

$$\text{cov}[\hat{\beta}] = M \left\{ \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right] \left[ \hat{\beta} - M\{\hat{\beta}\} \right]^T \right\}.$$

Вважаючи некорельованість випадкових похибок у  $(U^T X)^{-1}$  і  $(U^T Y)$ , беручи перші члени, розкладаємо (3.42) у ряд Тейлора

$$\hat{\beta} \approx M\{\hat{\beta}\} + \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}],$$

Отримаємо вираз для коваріації оцінок  $\hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\beta}] &= M \left[ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}] \right] \times \\ &\times \left[ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] [U^{*T} Y^*] + (U^{*T} X^*)^{-1} [\delta U^T Y^* + U^{*T} \tilde{\varepsilon}] \right]^T = \\ &= M \left\{ \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right] \left[ [U^{*T} Y^*] (U^{*T} Y^*)^T \right] \left[ \delta(U^T X)^{-1} \right]^T \right\} + \quad (3.44) \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} Y^{*T} M \{ \delta U \delta U^T \} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} Y^* + \\ &+ [U^{*T} X^*]^{-1} U^{*T} M \{ \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T \} \left[ (U^{*T} X^*)^T \right]^{-1} U^*, \end{aligned}$$

де перша і друга компоненти залежать від порогів  $\Delta_i$  у (3.41) і від шумів  $N$  в  $X$ , а третій — від шумів у  $Y$ .

При зменшенні порога  $\Delta$  до нуля перший компонент (як і в МНК, яка залежить від  $N$ ) прямує до нуля, оскільки при  $\Delta \rightarrow 0$  можуть існувати точки  $k$ , у яких  $u_i(k) \rightarrow \infty$ , а отже,  $\left\| (U^T X)^{-1} \right\| \rightarrow 0$ .

При  $\Delta \rightarrow 0, u \rightarrow 0$ ,  $(U^T X)^{-1} \rightarrow 0$ , тобто перший компонент при зменшенні  $\Delta$  спадає.

Другий компонент (3.44) пропорційний коваріаційній матриці  $M\{\delta U \delta U^T\}$  і при  $\Delta \rightarrow 0$  прямує до нескінченості, а при  $\Delta \rightarrow \infty$  — до нуля.

Третій компонент від параметра  $\Delta$  не залежить. Отже, для конкретних умов існує оптимальний вектор порогів  $\Delta^*, \Delta_i^*, i = \overline{1, n}$ , за якого норма коваріації мінімальна.

Якщо перешкоди  $N_i, \tilde{\epsilon}$  некорельовані, а  $\epsilon^* \rightarrow 0$ , то оцінка (3.42) буде незміщеною. Ефективність оцінок оптимізується в БАСІ за основним показником  $I_{qk}$  шляхом підбору вектора  $\Delta$ .

### 3.5. Метод прогнозу кореляцій

Постановка задачі така сама, як і для попереднього методу: сигнали  $X^*, Y^*$  гладкі, перешкоди  $\epsilon, N$  взаємнекорельовані, нормовані кореляційні функції перешкод затухають швидше, ніж відповідні функції сигналів  $X^*, Y^*$ ; за зашумленими вибірками  $X, Y$  треба отримати оцінку  $\hat{\beta}$ , близьку до оцінки МНК для точних даних.

Згідно з МНК,

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = A^{-1} B, \quad (3.45)$$

де  $A = [a_{ij}]_{i=1}^n$ ,  $B$  — вектор-стовпчик скалярних добутків  $(y(k), x_i(k))$ ,  $k = \overline{1, M}$ .

Коефіцієнти  $a_{ij}$  можна подати як відповідні кореляційні функції при нульовому зсуві змінних:

$$a_{ij} = MR_{x_i x_j}(0); \quad b_i = MR_{y x_i}(0).$$

Відповідно для зсуву  $m$  маємо

$$a_{ij}^{(m)} = MR_{x_i x_j}(m); \quad b_i^{(m)} = MR_{y x_i}(m).$$

Нехай  $R_{x_i x_i}(\tau) = R_{x_i x_i}^*(\tau) + \delta R_{x_i x_i}(\tau)$ ,  $0 < \tau < r + m$ , де  $\delta R_{x_i x_i}$  — похибка, переважно пов'язана з шумами  $N_i$  у вимірах  $x_i$ .

Покладемо в інтервалі  $[m, rm]$  лінійну модель автокореляції

$$\hat{R}_{x_i x_i}(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1(\tau - \tau_{cp}). \quad (3.46)$$

Тоді як оцінки коефіцієнтів  $a_{ij}$  в формулі (3.45) візьмемо прогнозні в точку  $k = 0$  оцінки рівняння (3.46) кореляційних функцій, побудованих на інтервалі  $[m, rm]$ , де кореляційна функція перешкод майже відсутня:

$$\hat{\alpha}_{ii} = MR_{x_i x_i}(0) = \alpha_{0i}; a_{ij} = MR_{x_i x_j}(0), i \neq j; b_i = MR_{y x_i}(0). \quad (3.47)$$

У рівнянні (3.46) моделі  $\hat{R}_{x_i x_i}$  параметри  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$  визначаються по МНК:

$$\tau_{cp} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} \tau_k; \quad \alpha_0 = \frac{1}{r+1} \sum_{k=m}^{r+m} R_{x_i x_i}(\tau_k);$$

$$\alpha_{1i} = \sum_{i=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp}) R_{x_i x_i}(\tau_k) / \sum_{k=m}^{r+m} (\tau_k - \tau_{cp})^2.$$

Тоді (3.45) і (3.47) визначають  $\hat{\beta}_{МПК}$  — оцінку за методом прогнозу кореляцій (МПК).

Позначимо  $\alpha_{ii} - \hat{\alpha}_{ii} = \delta\alpha_{ii}$ ,  $\delta A = [\delta\alpha_{ii}]_{i=1}^n$  — вектор-стовпчик;

$E\delta\alpha = \delta A_{МПК}$ ,  $A = A^* + \delta A_{МПК}$ , де через  $A^*$  позначено матрицю  $A$  для МНК за відсутності шумів. Використовуючи розкладання в ряд Тейлора, загалом отримаємо

$$\delta B = (A^* + \delta A)^{-1} B^* - A^{*-1} B^* \approx$$

$$\approx A^{*-1} B^* - (A^{*-1})^2 \delta A B^* - A^{*-1} B^* = -A^{*-1} \delta A A^{*-1} B^* = -A^{*-1} \delta A \beta^*.$$

Розглянемо два випадки:

1) на рис. 3.2, а  $\hat{R}_{x_i x_i}^*(\tau)$ ,  $\tau \in [0, r+m]$  — опукла функція. Тоді  $\alpha_{ii} > \hat{\alpha}_{ii}$ ,  $\delta A_{МНК} > A_{МПК}$ . Отже,  $\|\delta\beta_{МПК}\| < \|\delta\beta_{МНК}\|$ ;

2) на рис. 3.2, б  $R_{x_i x_i}^*(\tau)$  — увігнута функція. Підбором інтервалу  $(m, r)$  можна досягнути аналогічного результату і в цьому випадку. Із рис. 3.2 видно, що інтервал  $(m_2, r_2)$  задовольняє ці вимоги на відміну від інтервалу  $(m_1, r_1)$ . Отже, і в цьому випадку можна отримати менший зсув. Для опису  $R_{x_i x_i}^*(\tau)$  можуть застосовуватися ортогональні системи функцій та інші види моделей. У системах типу БАСІ структура і параметри  $R(\tau)$  можуть вибиратися за головним показником  $I_{qk}$ . Метод передбачає згладжування і прогнозування у точці  $\tau=0$  кореляційних функцій від сигналів  $x_i(t), x_j(t)$ . Аналізуючи дисперсії цих оцінок кореляцій, легко переконатися, що  $\sigma_{\delta R}^2$  тим більше, чим менша довжина вибірки  $T$ .

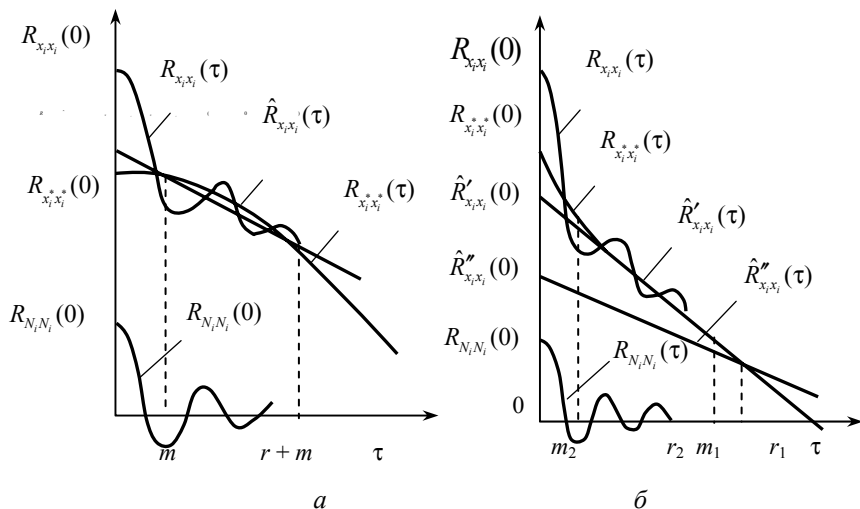


Рис. 3.2. Графік лінійної екстраполяції опуклої (а) і увігнутої (б) кореляційних функцій

### Список літератури до розділу 3

1. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.
2. Сильвестров А. М. Нариси з теорії ідентифікації / В. В. Самсонов, А. М. Сильвестров. — К. : НУХТ, 2012. — 222 с.

## РОЗДІЛ 4

### ЦІЛЕОРІЄНТАЦІЯ ПІДСИСТЕМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НА ГОЛОВНИЙ ПОКАЗНИК ЯКОСТІ ЕТК

#### 4.1. Багаторазово адаптивні системи ідентифікації в задачах прогнозу електроенергетичних показників ЕТК

Пояснимо ефект регуляризації задачі прогнозу в БАСІ наступним прикладом. Маємо графік  $y(t)$  (рис. 4.1), заданий на інтервалі  $[0, t_0]$ ,  $t_0 = T$ , який відображає невідому досліднику закономірність, де  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\varepsilon(t)$  — досить мала складова неврахованих ефектів в ЕТО

$$y(t) = \beta_0^* + \beta_1^* t + \beta_2^* \sin \omega t + \varepsilon(t). \quad (4.1)$$

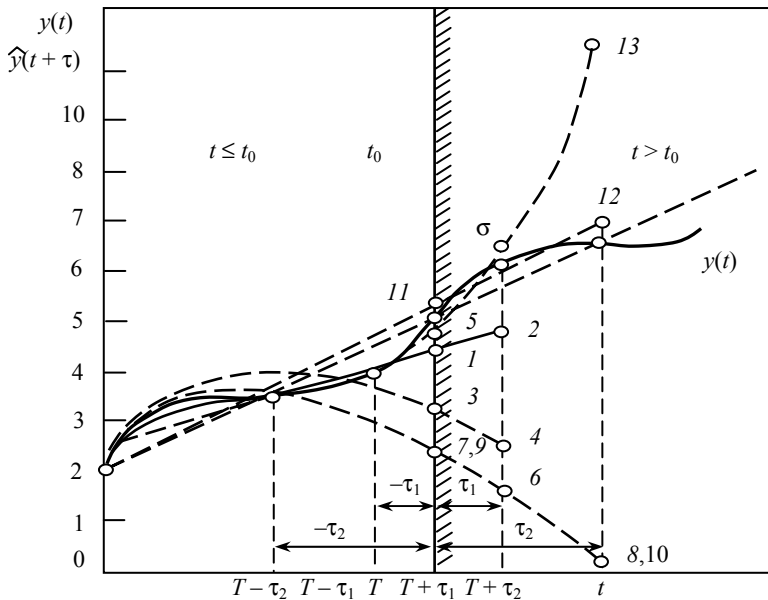


Рис. 4.1. Крива  $y(t)$  (суцільні лінії) та її прогнозуючі моделі (пунктирні лінії), які отримано для різноманітних навчальних  $([0, T - \tau_i] \text{ } i = 1, 2)$  і повірочних  $[T - \tau_i, T]$  вибірок даних



Нехай множина  $\{Opt_{qk}\}$  складається тільки з методу найменших квадратів (МНК), для якого вектор  $\alpha$  параметрів, що налаштовуються, відсутній, а множину  $\{\Sigma_{qk}\}$  моделей складено з трьох моделей:

$$\begin{aligned}\Sigma_{q1} : \hat{y}(t) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t; \quad \Sigma_{q2} : \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2; \\ \Sigma_{q3} : \hat{y}(t) &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2 + \hat{\beta}_3 t^3.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Головний критерій  $I = |y(t_0 + \tau) - \hat{y}(t_0 + \tau)|$ , що характеризує точність прогнозу, фізично не може бути реалізованим, тому що на практиці графік  $y(t)$  відомий тільки на інтервалі  $t \in [0, t_0]$ .

Розіб'ємо інтервал  $[0, t_0]$  на два підінтервали  $[0, T - \tau_i]$  і  $[T - \tau_i, T]$ ,  $i=1, 2$ . На першому інтервалі по МНК знайдемо  $\beta$  для моделей  $\{\Sigma_{q1}\}$ , на кінці другого перевіримо моделі за оцінкою  $\hat{I}$  головного критерію  $I$ :

$$\hat{I} = |y(t_0) - \hat{y}(t_0)|. \quad (4.3)$$

Припустимо, що якщо  $\tau_i$  дорівнює  $\tau$  прогнозу, то з малості оцінки критерію  $\hat{I}$  випливає малість основного критерію  $I$ .

У табл. 4.1 наведені значення критеріїв  $\hat{I}$  і  $I$  для  $\tau_1 = 0,2 T$ ,  $\tau_2 = 0,5 T$ , а також номери прогнозуючих точок на графіку (рис. 4.1).

Таблиця 4.1

Результати прогнозу невідомої закономірності

$\{\Sigma\}$	$\tau_i$	$\hat{I}$	Номер точки, що прогнозу- ється	$I$	Номер точки, що прогнозу- ється
$\Sigma_1$	0,2	0,7	1	1,4	2
$\Sigma_2$	0,2	1,8	3	3,6	4
$\Sigma_3$	0,2	0,2	5	0,4	6
$\Sigma_3$	0,5	5	7	6,2	8
$\Sigma_2$	0,5	5	9	6,2	10
$\Sigma_1$	0,5	0,2	11	0,3	12

Як видно з рис. 4.1 і табл. 4.1, для  $\tau = 0,2T$  оптимальною і по  $\hat{I}$ , і по  $I$  буде модель  $\Sigma_3$ , для  $\tau = 0,5T$  за двома критеріями —  $\Sigma_1$ . Застосування оптимальної за  $\hat{I}$  і  $I$  для  $\tau = 0,2T$  моделі  $\Sigma_3$  для прогнозу на  $\tau = 0,5T$  (точка 13 на графіку) призводить до різкого зростання  $I$ . Ефект регуляризації полягає в тому, що за одних і тих же даних, чим більше  $\tau$ , тим більш просту модель обирають за критерієм  $\hat{I}$ . Так як в силу неточності оцінок  $\hat{\beta}$  і самої структури  $\Sigma$  моделі для великих ступенів  $i$  поліному та великих  $\tau$  значеннях неточних компонент  $\beta_i(t + \tau)$  можуть вносити значну похибку (точка 13) прогнозу процесу  $y(t)$  за оцінкою  $\hat{y}(t)$ . Тому критерій  $\hat{I}$  відкидає ці елементи для  $\tau = 0,5 T$ , регуляризуючи задачу прогнозу.

На якість прогнозу буде істотно впливати метод  $Opt$  і його параметри  $\alpha$ . Додаткове перебирання в БАСІ на підмножині  $\{Opt_{qk}, \alpha_{qk}\}$  за критерієм  $\hat{I}$  дозволяє вибрати оптимальну в розумінні  $I$  пару  $\{Opt^*, \alpha^*\}$ . При застосуванні звичайного методу регуляризації, що полягає у введенні стабілізуючої домішки  $\alpha$  [10] в критерій МНК  $J = \varepsilon^T \varepsilon + \alpha (\hat{\beta} - \hat{\beta}_a)^T (\hat{\beta} - \hat{\beta}_a)$ , за відповідних значень  $\alpha$  можуть бути отримані аналогічні результати. Але не маючи критерію  $\hat{I}$ , невідомо, як вибрати ваги  $\alpha$  і як задати апіорні значення  $\beta_0$  вектора  $\beta$  параметрів моделі  $\Sigma$ , тоді як в класі БАСІ вони вибираються за умови

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \min_{(\alpha, \beta)} \hat{I}. \quad (4.4)$$

*Багаторазово адаптивні системи ідентифікації мають більш широкі можливості регуляризації порівняно зі звичайними. Ефективність БАСІ очевидна настільки, наскільки очевидна нерівність*

$$\left. \inf I_q(\Sigma, Opt, \alpha, u) \right|_{\beta = \arg \min J} < \left. \inf I_q(u) \right|_{\substack{\Sigma = \text{const} \\ (Opt, \alpha) = \text{const} \\ \beta = \arg \min J}}, \quad (4.5)$$

де права частина рівняння відповідає системам мінімізації  $I_q$  зі звичайним ідентифікатором (тільки частина 4 схеми на рис. 1.3), а ліва — системам з БАСІ-ідентифікатором (частини 2, 3, 4). Якщо  $I_q$  не враховує втрат на пошук  $\inf I_q$  (як у прикладі прогнозу), то нерівність строга. Якщо враховує, то для великої розмірності елементів  $\Sigma, Opt, \alpha$  і неякісній їх впорядкованості проекторами  $PR_1, PR_2$  БАСІ нерівність може не виконуватися. У таких системах порушено *принцип раціонального ускладнення*. Ускладнення (розширення розмірності елементів) багаторівневої системи з БАСІ-ідентифікатором повинно бути таким, щоб нерівність (4.5) не послаблювалася, а посилювалася. Тільки таке ускладнення доцільне.

Розглянемо випадок, за якого очевидна наявність періодичної складової часового ряду, наприклад, **помісячний об'єм споживання електроенергії**. Хоч цей показник рік від року змінюється, але в межах кожного року, тобто строго періодично у часі має місце збільшення його узимку і зменшення влітку. На рис. 4.2 наведено вибірку в 312 точок середньомісячних значень електроспоживання на Україні за 26 років (1960–1986). Відсутність вхідної змінної  $u(t)$  (в основному зростання промислових потужностей) не дає змоги побудувати модель «вхід — вихід» або «причина — наслідок». Аналізуючи лише наслідок, маємо можливість представити його однорідним диференціальним рівнянням

$$(T_1 p - q)(T_2^2 p^2 - 2\xi T_2 p + 1)x(t) = 0. \quad (4.6)$$

$$x(0) \cong 2000; \quad px(0) \cong 70 \text{ МВт/місяць.}$$

Така модель відповідає для того часу тенденції зростання середньорічного споживання (корінь  $p_1 = \frac{1}{T_1}$ ) і поступового зростання

$$\text{ня коливань} \left( p_{2,31} = \frac{\xi}{T} \pm j\sqrt{\frac{\xi-1}{T^2}} \right).$$

Але експоненціальна тенденція зростання має місце для  $k = 0,220$ . Далі процес виходить на усталений режим. Тому більш точною буде модель зі змінними у часі коефіцієнтами  $T_1 p$  і  $\xi(t)$ , тоді як  $T_2$  залишається незмінним і дорівнює 12 місяцям.

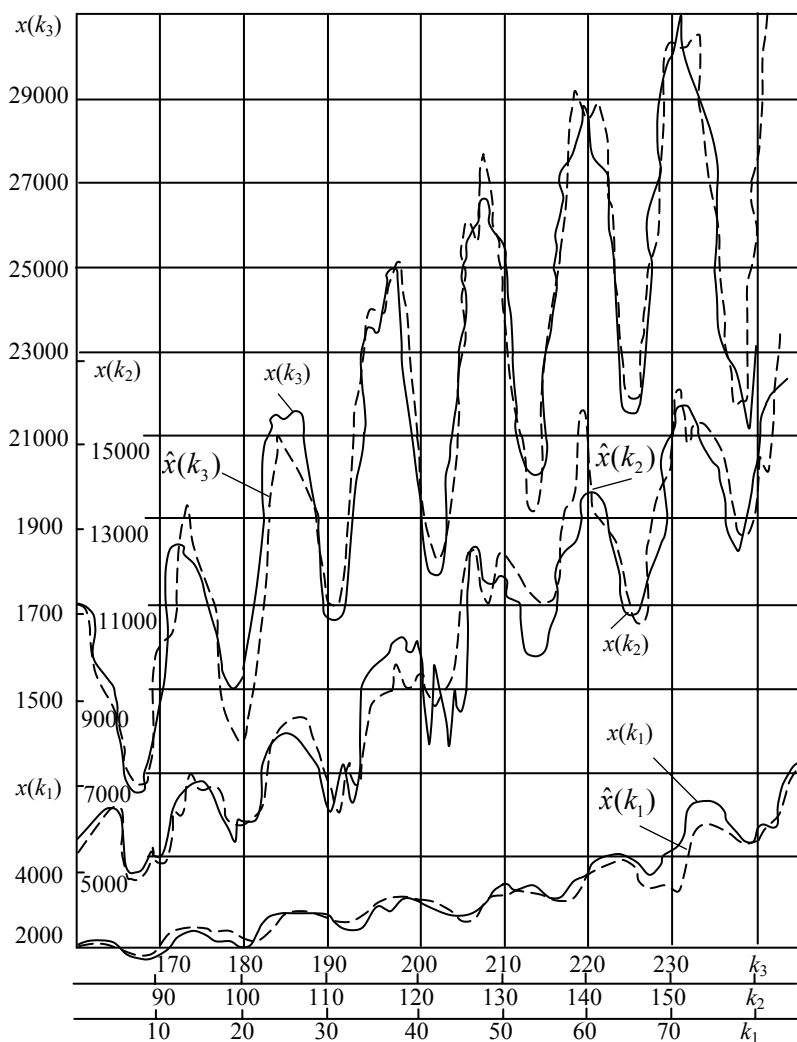


Рис. 4.2. Прогнозне  $\hat{x}(k_i)$  і вимірне  $x(k_i)$  значення ряду,  $i = 1, 2, 3$

За такої постановки прогнозне значення  $\hat{x}^{\text{пр}}(T + \tau)$  обчислюється по моделі (4.6), як її рішення для прогнозних значень  $T_1(T + \tau)$  і  $\xi(T + \tau)$ .

На рис. 4.2 наведено виміряні  $x(k_i)$  та прогнози  $\hat{x}(k_i)$  на один рік уперед значення електроспоживання. Прогноз виконано нестационарною різницевою моделлю з річним кроком (12 місяців), яка розраховувалась по попередніх трьох роках:

$$\hat{x}(k+12) = \beta_0 x(k) + \beta_1 x(k-12) + \beta_2 x(k-24) + \beta_3 x(k-36). \quad (4.7)$$

Ця модель є різницевим еквівалентом неперервної моделі (4.6) зі змінними у часі коефіцієнтами. Оцінки  $\beta_i$ ,  $i = \overline{0,3}$ , моделі (4.7) визначено за методом найменших квадратів.

Для селекції моделей (степені  $n$ ) необхідно скористатися зовнішнім критерієм, наприклад, критерієм «регулярності»

$$\hat{I} = \left[ \frac{\sum_{k=1}^{N_{nn}} (x_i^{np}(k) - \hat{x}_i^{np}(k))^2}{\sum_{k=1}^{N_{nn}} (x_i^{np}(k))^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.8)$$

де  $x_i^{np}(k)$ ,  $k = \overline{1, N_{np}}$  — значення часового ряду  $x_i(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$ , вибрані у перевіірочну послідовність;  $\hat{x}_i^{np}(k)$ ,  $k = \overline{1, N_{np}}$  — прогнозні оцінки  $x(k_i)$  на перевіірочній послідовності, отримані по моделі, побудованій на робочій послідовності  $M - N_{np}$  точок  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, M - N_{np}$ ).

Як підкреслено в праці [2], недоліком побудови моделей за критерієм (4.8) є надмірна критичність моделей до способу вибору точок у перевіірочній та робочій послідовностях. Для більшої ефективності селекції моделей критерій (4.8), як правило, доповнюють критеріями незміщеності або балансу змінних. Це дає можливість будувати досить якісні моделі для середньострокового та довгострокового прогнозування часових рядів.

Взагалі моделі часових рядів у вигляді однорідних диференційних чи авторегресійних різницевих рівнянь можна розглядати, як неоднорідні, у яких вхідну змінну  $u(t)$  представлено додатковою системою диференційних рівнянь порядку  $m$ :  $\dot{u} = cu$ ,  $u(0) = u_0$ . Тоді замість системи порядку  $n$ , отримаємо однорідну систему  $\dot{Z}(t) = DZ(t)$  розширеної розмірності  $n + m$ , де  $Z = (X, Y)$ ,

$D = D(A, B, C)$ . Саме це і спостерігається при описі часових рядів. Так однорідне рівняння (4.6) штучно розширене до третього порядку внаслідок відсутності керуючого впливу  $u(t)$ , яким може бути внутрішній валовий продукт, загальний об'єм виробництва, що утворює аперіодичну (середньорічну) складову ряду; витрати на опалення, що складають коливальну складову, а їх зв'язок з енергоспоживанням носить безінерційний характер, чи максимум інерційності першого порядку та неединичний коефіцієнт передачі (унаслідок втрат). Звідси зрозуміло, що більш точною і фізичною є моделі, що враховують основні причинно-наслідкові зв'язки у об'єкті, що досліджується. За відсутності інформації про ці зв'язки слід проводити селекцію структур моделей по зовнішньому критерію  $I$ , починаючи з якомога простіших (мінімальної мірності параметрів, що оцінюються), але таких, які б враховували властивості часового ряду, що апроксимується. Наведемо, як приклад, деякі з таких моделей та їх властивості (ознаки):

$y_1 = \beta_1 \sin(\beta_2 x + \beta_3)$  — синусоїда, витягнута у  $\beta_1$  разів по  $y$ , зтиснута в  $\beta_2$  раз по  $x$ , зсунута по осі на відрізок  $\beta_3 / \beta_2$ , з періодом

$$T = 2\pi / \beta_2, \text{ має нулі в точках } x = \frac{n\pi - \beta_3}{\beta_2};$$

$y_2 = \beta_1 \operatorname{tg}(\beta_2 x + \beta_3)$  — має період  $\pi / \beta_2$ , розриви по  $y_2$  у точках  $x = \frac{(n+1)\pi}{2\beta_2}$ ;

$y_3 = \beta_1 \arcsin(\beta_2 x)$  — монотонно зростає від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  при зміні  $x$  від  $-1/\beta_2$  до  $+1/\beta_2$ ;

$y_4 = \beta_1 \operatorname{arctg}(\beta_2 x)$  — монотонно зростає від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  при зміні  $x$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ ;

$y_5 = \beta_1 x^{\beta_2}$  — монотонно росте з прискоренням зростання при  $\beta_2 > 1$  та замедленням, при  $\beta_2 < 1$ ;

$y_6 = \beta_1 e^{\beta_2 x} = \beta_1 \beta_3^x$  — монотонно росте від 0 до  $\infty$  при  $\beta_2 > 0$  або  $\beta_3 > 1$ , монотонно зменшується від 0 при  $\beta_2 < 0$  або  $\beta_3 < 1$ ,

$y_7 = \beta_1 \log_{\beta_2} x (\beta_2 > 0)$  — при  $\beta_1 = 1 \cdot y_7$  є дзеркальне відображення  $y_5$  відносно лінії  $y_7 = x$ ;

$y_8 = \beta_1 e^{-(\beta_2 x)^2}$  — монотонно зростає від 0 до  $\beta_1$  і зменшується від  $\beta_1$  до 0 симетрично відносно  $x = 0$ ;

$y_9 = \beta_1 e^{\beta_2 x} + \beta_3 e^{\beta_4 x}$  — монотонно змінює конфігурацію залежно від знаків і величин  $\beta_1 - \beta_4$ ;

$y_{10} = \beta_1 e^{\beta_2 x + \beta_3 x^2} = y_6 y_8$  — несиметрична зростаюча (при  $\beta_3 > 0$ ) або спадаюча (при  $|\beta_3| > |\beta_2|$ ,  $\beta_3 < 0$  до  $\beta_1$ );

$y_{11} = \beta_1 x^{\beta_2} e^{\beta_3 x}$ ,  $x > 0$  — зростаюча при  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_1 < 0$ ,  $\beta_3 > 0$ , екстремальна, випукла, несиметрична, дзвіноподібна з зсувом екстремуму по осі  $OX$  тим більше, чим більше  $\beta_3$ .

Аналізуючи ряд, який досліджується, за наведеними для функцій  $y_1(x) - y_{11}(x)$  ознаками, де  $x$  для часових рядів це  $t$ , можна підібрати оптимальну за критерієм мінімальної складності модель. Такий аналіз легко автоматизувати, використовуючи стандартні сучасні алгоритми розпізнавання образів, побудовані на основі теорії нечітких множин та нейроноподібних структур чи будь-яких інших статистичних методів.

Показники енергетики ЕТК, як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу та ін. [1].

Елементи, з яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу  $t$  (степеневі:  $t^i$ ,  $-\infty < i < \infty$ ; періодичні тригонометричні:  $\sin(\omega t + \varphi)$ ; комбіновані:  $\sin^i(\omega t + \varphi)$  та іншими точно заданими функціями  $f(t)$ ) або затриманими у часі  $t$  значеннями самого ряду  $y(t)$  ( $y(t - \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t_k$ , де  $t_k$  — кінцеве значення часу). Як правило, час  $t$  представлено дискретами  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  не завжди з рівномірним кроком  $\Delta t$ .

У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на вказаних елементах, можна підібрати найкращу (за основним критерієм  $I$  (критерієм точності прогнозу)) структуру.

Моделі з степенними елементами, як правило, краще використовувати для коротких рядів, а авторегресійні — для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов).

Показник  $I$  точності прогнозу, який фізично реалізується, представимо зваженою сумою часткових показників  $I_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду показник  $I_1$ :

$$I_i = \frac{1}{n} \text{tr} \left[ \text{diag} \frac{|\hat{\beta}_i^n - \hat{\beta}_i^n|}{|\hat{\beta}_i|} \right], \quad i = \overline{1, n},$$

де —  $\hat{\beta}_i^n$ ,  $\hat{\beta}_i^n$ ,  $\hat{\beta}_i$  оцінки  $i$ -го параметра моделі, отримані по вибірці парних, непарних та всіх дискретів  $k$  часу  $t_k$ ; це, так званий, параметричний показник регулярності. Показник  $I_2$ :

$$\begin{aligned} \epsilon^T &= [\epsilon(1), \dots, \epsilon(M)], \quad \hat{x}^T = [\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(M)], \\ I_2 &= (\epsilon^T \epsilon) (x^T x)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де  $\epsilon(k)$  — похибки апроксимації сигналу  $x(k)$  відповідною моделлю в  $k$ -й точці ряду; це, так званий, сигнальний показник незміщеності, або точності моделювання ряду моделлю. Показник  $I_3$ :

$$I_3 = |1 - K|, \quad K = \frac{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i) \hat{x}(M-i)|}{\sum_{i=1}^L \eta_i |x(M-i)| \sum_{i=1}^L \eta_i |\hat{x}(M-i)|}. \quad (4.10)$$

Тут  $\eta_i$  коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу по  $L$  останнім точкам вибірки  $x(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$ ;  $\sum_{i=1}^L \eta_i = 1$ ;  $\hat{x}(M-i)$  — прогнозні значення  $x(M-i)$ , отримані з моделі, побудованої на скороченій на  $L$  останніх точок вибірці  $k = \overline{1, M-L}$ .

Оскільки, вважається, що прогнозований ряд  $x(k)$  складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і випадкової складової, близької до гаусівського «білого шуму», то у варіаційному ряді упорядкованих за складністю (вимірності вектора  $\beta$  невідомих параметрів) моделей, показники  $I_1$  і  $I_3$  обмежують вимірність  $n$  вектора  $\beta$ , в той час, як показник  $I_2$  зі зростанням  $n$  зменшується. Залежно від мети ідентифікації варіюються коефіцієнти ваги  $g_i$  зваженої суми цих трьох показників:



$$I = \sum_{i=1}^3 g_i I_i; \quad I = \sum_{i=1}^3 g_i = 1; \quad g_i \geq 0. \quad (4.11)$$

Для задачі контролю параметрів  $\beta_i$  моделі відомої структури максимальна вага  $g_1$ ; для задачі  $\hat{\beta}$  точної апроксимації ряду  $x(k)$  моделлю  $\hat{x}(k) - g_2$ ; для задачі прогнозу —  $g_3$ . Сукупність показників  $I_1, I_2, I_3$  забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю  $\varepsilon^T$  апроксимації та точністю прогнозу.

На конкретному прикладі реального часового ряду, що має 43 дискрети  $x(k)$  з рівномірним кроком  $\Delta t = 4$  місяці (один з показників у енергетиці України). На рис. 4.3, та табл. 4.2, розглянемо рішення задачі прогнозу  $x(k)$  на 6 останніх  $k = \overline{1, 37}$  точок, вважаючи їх невідомими. Така постановка задачі дає можливість реалізувати, фізично не реалізований при прогнозі в майбутнє, об'єктивний показник  $I$  відносної точності прогнозу на ці 6 точок:

$$I = \frac{[\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)][\varepsilon(38), \dots, \varepsilon(43)]^T}{[x(38), \dots, x(43)][x(38), \dots, x(43)]^T}, \quad (4.12)$$

тобто відносно середньоквадратичне відхилення  $\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k)$ ,  $k = \overline{38, 43}$  прогнозних значень  $\hat{x}(k)$  від відомих

$x(k)$ . В критерії (4.10) взято  $\eta_i = \frac{1}{L} = \frac{1}{6}$ . Коефіцієнти ваги  $g_i$  в узагальненому критерії (4.11) прийнято такими:  $g_1 = 0,9$ ;  $g_2 = 0,4$ ;  $g_3 = 0,4$ .

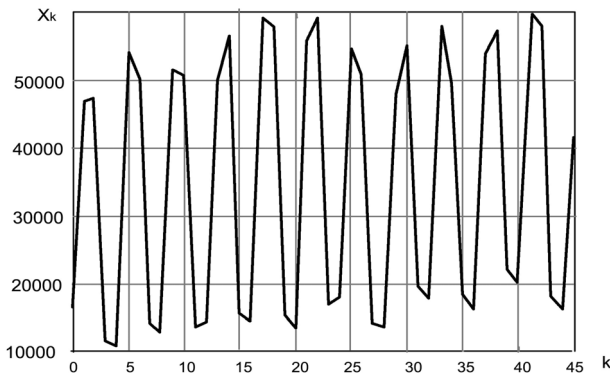


Рис. 4.3. Часовий ряд одного з показників енергетики України

Таблиця 4.2

Залежність  $x(k)$  від  $k$ 

$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$	$k$	$x$
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53950
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650
9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Середнє значення ряду 35100, середньоквадратичне відхилення ряду від середнього — 19550, коефіцієнт варіації — 0,55. Наведеному у табл. 4.1 ряду ставились у відповідність різні математичні моделі.

1) моделі у вигляді різного порядку степеневому поліному від  $t$ , тобто від дискретів  $k$  часу:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k, \quad (4.13)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2, \quad (4.14)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3, \quad (4.15)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k^{\frac{1}{4}} + \beta_2 k^{\frac{1}{3}} + \beta_3 k^{\frac{1}{2}} + \beta_4 k^{\frac{3}{2}}, \quad (4.16)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 k^{-1} + \beta_3 k^{-3};, \quad (4.17)$$

2) моделі авторегресії від  $k$  з постійним та змінним кроками:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1), \quad (4.18)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2), \quad (4.19)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3), \quad (4.20)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-4), \quad (4.21)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-2) + \beta_3 x(k-3) + \beta_4 x(k-4), \quad (4.22)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4), \quad (4.23)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 x(k-1) + \beta_2 x(k-4) + \beta_3 x(k-8); \quad (4.24)$$

3) комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі:

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1), \quad (4.25)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-4), \quad (4.26)$$

$$\hat{x}(k) = \beta_0 + \beta_1 k + \beta_2 x(k-1) + \beta_3 x(k-4). \quad (4.27)$$

На множині структур (4.13)–(4.27) моделей часового ряду (табл. 4.2) та множині, запропонованих у попередньому розділі для задач прогнозу методів (МНК, УМНК, ІМНК, МДЗ), було перевірено ефективність використання критерію, який фізично реалізується (4.11) на предмет його близькості до критерію, який фізично не реалізується (4.12). Тут під ефективністю розуміють правильність вибору найкращого за критерієм (4.12) методу, вибраного за критерієм (4.11). Результати числового моделювання представлено в табл. 4.2, де в 15 рядках табл. 4.3 подано в стовпчиках:

1 — типи моделей (степеневі (4.13)–(4.17), авторегресійні (4.18)–(4.24), комбіновані (4.25)–(4.27);

2 — відносну середньоквадратичну похибку моделювання ряду відповідною моделлю при  $k = \overline{1,37}$  ідентифікації її по МНК;

3 — ідеальний критерій, який фізично не реалізується (4.12) по МНК;

4 — критерій, який фізично реалізується (4.11) при ідентифікації моделі по МНК;

5 — найкращий по критерію (4.11) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

6 — значення ідеального критерію (4.12) для вибраного по реальному критерію (4.11) методу для відповідної до рядка моделі;

7 — значення критерію (4.11) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

8 — найкращий за ідеальним критерієм (4.12) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;

9 — значення ідеального критерію (4.12) для найкращого за ним методу ідентифікації моделі відповідного рядка;

10 — значення реального критерію (4.11) для найкращого за критерієм (4.12) методу ідентифікації моделі відповідного рядка.

Таблиця 4.3

**Результати моделювання роботи БАСІ у задачі прогнозу**

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10,89	0,49	0,47	0,25	УМНК	0,41	0,242	МОД	0,363	0,26	1,3
2	10,90	0,484	0,593	0,26	ІМНК	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	10,91	0,476	0,883	0,41	ІМНК	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	10,92	0,485	0,593	0,27	УМНК	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	10,93	0,488	0,49	0,25	ІМНК	0,45	0,23	УМНК	0,425	0,237	1,15
6	10,94	0,49	0,435	0,24	УМНК	0,42	0,235	УМНК	0,415	0,235	1,05
7	10,95	0,62	0,58	0,28	УМНК	0,56	0,262	УМНК	0,558	0,262	1,04
8	10,96	0,123	0,143	0,04	МНК	0,143	0,04	МОД	0,096	0,048	1,49
9	10,97	0,133	0,1	0,03	МНК	0,1	0,03	МОД	0,088	0,126	1,13
10	10,98	0,113	0,122	0,037	МДЗ	0,092	0,03	МОД	0,092	0,03	1,33
11	10,99	0,131	0,103	0,034	МДЗ	0,091	0,031	МОД	0,091	0,031	1,13
12	10,100	0,0087	0,092	0,015	МДЗ	0,063	0,011	МОД	0,063	0,011	1,46
13	10,101	0,488	0,47	0,245	МДЗ	0,489	0,225	УМНК	0,411	0,237	1,14
14	10,102	0,132	0,108	0,035	МНК	0,108	0,035	МОД	0,0181	0,038	1,33
15	10,103	0,131	0,111	0,036	МНК	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

Проаналізуємо отримані результати розрахунків:

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (див. табл. 4.2) найкращою по ідеальному критерію (4.12) виявилась авторегресійна модель (4.24) зі змінним запізненням на  $k - 1$ ,  $k - 4$  і  $k - 8$  кроків; найкращий метод — МДЗ. За реальним критерієм (4.11) отримано той самий результат (!). Взагалі, з 15 розглянутих випадків у 8-ми оптимальний метод ідентифікації по реальному критерію (4.11) було вибрано вірно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 табл. 4.3), тобто він співпав з методом, вибраним по ідеальному критерію (4.12). В інших 7-ми випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (4.12) для методу, вибраного за реальним показником (4.11), несуттєво гірший за цей показник для оптимального по ідеальному показнику методу (стовпчики 6 і 9, табл. 4.3).

З рис. 4.4 наочно впливає висновок про сильну кореляцію показників (4.11) і (4.12) і, як наслідок, можливість ефективного використання критерію, який фізично реалізується (4.11).

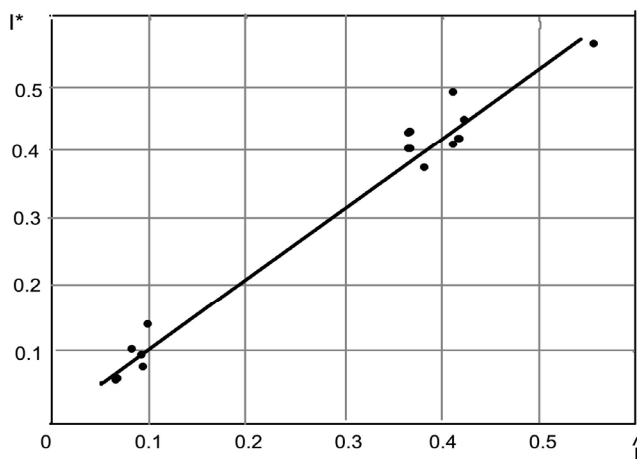


Рис. 4.4. Залежність ідеального показника  $I^*$  (4.12), отриманого для оптимального для нього методу ідентифікації від того самого показника для оптимального по реальному показнику  $\hat{I}$  метода ідентифікації

2. У міру ускладнення моделей (4.13), (4.14), (4.15), що є степеневими рядами, показник (4.9) (II стовпчик табл. 4.3) середньоквадратичної похибки апроксимації ряду (див. табл. 4.1) моделями (4.13)–(4.15) зменшується, що природно впливає з першої теореми Вейерштрасса про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). У той же час ідеальний критерій (4.5) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1, 2, 3 третього стовпчика табл. 4.3). Це підтверджує необ'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (4.9), некоректність його використання для задачі прогнозу.

3. Дещо інша ситуація має місце для авторегресійних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (4.18)–(4.27). Тут унаслідок регуляризуючої властивості МНК, коли змінні зашумлені, внутрішній критерій (4.9) середньоквадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (4.12), так і реальний (4.11) критерії стають достатньо сильно корельованими (рис. 4.5).

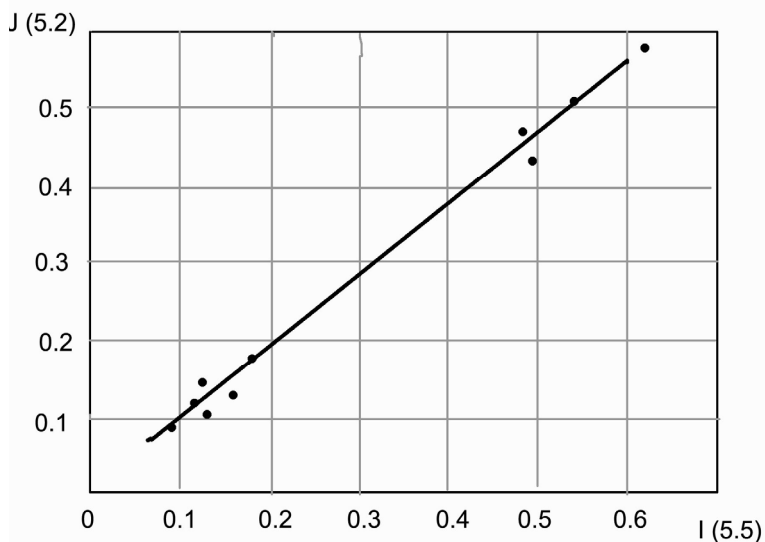


Рис. 4.5. Регресійна залежність  $J$  (4.9) від  $I$  (4.12)

Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (4.9) в задачі прогнозу в точки (38÷43) по зашумленим даним в точках (1÷37). Тут має місце саморегуляризація. Чим складніше авторегресія, тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних. Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим [10]) модель ЕТО.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (4.12) для моделей, отриманих по МНК (стовпчик 3) і одному з запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією по реальному критерію (4.11). З 15 моделей тільки для моделі (4.25) показник (4.12) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (4.11) помилково замість МНК було вибрано МДЗ. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму критерію точності прогнозу, який фізично реалізується (4.11), дав кращі результати, ніж МНК, або такі ж, якщо по (4.11) вибирався, як кращий, МНК (див. стовпчики 6 і 3 табл. 4.3).

5. У межах одного методу ідентифікації, наприклад, МДЗ (стовпчик 6, рядки 10÷13) розкид ідеального критерію (4.12) залежно від структури моделі становить від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

У межах однієї, наприклад, оптимальної за критерієм (4.12) моделі (4.24), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МДЗ, УМНК, ІНК) дає вииграш в 1,5 рази (0,092 — для МНК і 0,063 — для МДВ, як оптимального методу).

6. У цілому оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий вииграш у точності прогнозу. Визначимо цей вииграш, як відношення критерію (4.12) для моделі з коефіцієнтами, визначеними по МНК (стовпчик 3, табл. 4.2) до значення того самого критерію (4.12) для тієї ж моделі, з коефіцієнтами, визначеними оптимальним по (4.12) методом (стовпчик 9, табл. 4.3). В стовпчику 11 табл. 4.3 подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32. середньому воно становить 1,33.

Таким чином розширення оптимізуємих по головному показнику  $I$  (та його реалізації  $\hat{I}$ ) елементів (методів і моделей) в БАСІ суттєво покращує кінцевий результат прогнозу.

## **4.2. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в задачах оптимального керування ЕТО**

### **4.2.1. Узгодженість показників якості ЕТК підсистем різного рівня**

Покажемо позитивний ефект від узгодженості показників якості багаторівневої системи на наступному прикладі:

Нехай задано квадратичний показник якості керування ЕТО:

$$I = \int_{\theta_2} (x^T G x + u^T Q u) dt, \quad (4.28)$$

де  $G, Q$  — вагові матриці;  $\theta_2$  — інтервал часу керування.

Тоді

$$\frac{\partial I}{\partial \epsilon} = \int_{\theta_2} \left[ \delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G x + x^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q u + u^T Q \delta u \right] dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \epsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial I}{\partial \epsilon} = \int_{\theta_2} [\delta u^T \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q \delta u] du = \\ &= \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] \delta u dt. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Для одиничних варіацій  $\delta u$  функціонал (4.28) буде несуперечливим основному, якщо варіації функціоналів будуть подібними:

$$\int_{\theta_2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] dt = k_1 A_1,$$

або в скалярному вигляді

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \int_{\theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} dt + \int_{\theta_2} q_{lk} dt = k_1 \alpha_{lk}^1, l, k = \overline{1, m}, \quad (4.30)$$

де  $k_1$  — коефіцієнт подібності;  $\alpha_{lk}^1$  — елемент матриці  $A$ ,  $g_{ij}$ ,  $q_{lk}$  — елементи матриць  $G$  і  $Q$  відповідно.

Оскільки  $A_1$  симетрична, то загальна кількість рівнянь (4.30)  $0,5m(m+1)$ , а коефіцієнтів, що необхідно підібрати  $g_{ij}$ ,  $q_{lk}$   $0,5n(n+1)$  і  $0,5m(m+1)$  відповідно. Це дозволяє підбором їх задовольнити  $m(m+1)$  вимогам (4.30) несуперечності  $I$  до  $\Lambda$ , а також ряду інших вимог, що визначаються системою оптимізації  $I$ . При такому підході до побудови функціоналу  $I$  істотно полегшується задача задання матриць  $G$  і  $Q$ .

Наступний крок полягає в побудові критерію  $J$  підсистеми ідентифікації ЕТО. Нехай на попередньому кроці було отримано несуперечливий з  $\Lambda$  функціонал  $I$  (4.28) з ваговими  $G^*$  і  $Q^*$ , що задовольняють умову (4.30). Знайдемо другу варіацію  $I$  вже в просторі параметрів  $\beta$  моделі  $(\Sigma, \beta)$  і задамо її як еталонну для функціоналу  $J$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \epsilon^2} = \int_{\theta_2} \delta u^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + Q^* \right] \delta u dt,$$

де



$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_{r1}}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial \beta_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta^2 I(\beta) &= \int_{\theta_2} \delta \beta^T \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta \beta dt = \\ &= \delta \beta^T \left[ \int_{\theta_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \times G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta = \delta \beta^T A_2 \delta \beta. \quad (4.31) \end{aligned}$$

У функціоналі

$$J = \int_{\theta_3} i(\hat{x}, x_m, \alpha) dt \quad (4.32)$$

у точці  $\hat{x} = x_m$ , що відповідає оцінці  $\hat{\beta}$ , що дорівнює  $\beta$ , перша варіація  $J$  повинна дорівнювати нулю, а друга

$$\delta^2 J(\beta) = \delta \beta^T \left[ \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_m}{\partial \beta} \right)^T \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_m^T \partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial \beta} dt \right] \delta \beta$$

подібна (4.31), тобто:

$$A_3 = \int_{\theta_3} \left( \frac{\partial x_m}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_m^T \partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial \beta} dt = k_2 A_2, \quad (4.33)$$

де  $A_2$  містить  $0,5r(r+1)$  різноманітних елементів  $\alpha_{ij}^2$ .

Для того, щоб повністю задовольнити (4.33) функціонал (4.32) повинен містити не менше ніж  $0,5r(r+1)$  керованих параметрів  $\alpha$ .

Нехай, як приклад, модель  $(\Sigma, \beta)$  подано у вигляді

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(p) u(t),$$

де  $W_i(p)$  — задані оператори від  $p = \frac{d}{dt}$ .

Покладемо, що в (4.31)

$$A_2 = \text{diag} \left[ \alpha_{ij}^2 \right].$$

Із умови (4.33), тобто з умови  $k_2 \alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3$ , знайдемо  $u(t)$  і представимо набором ортогональних функцій  $\varphi_k(t)$ :

$$u(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (4.34)$$

де  $m$  — кількість членів  $\varphi_k(t)$ , що надають адекватне уявлення  $u(t)$  на інтервалі ідентифікації  $\theta_3 = [0 \ T]$ ;  $\varphi_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  — система ортогональних функцій, наприклад косинусний ряд

$$\varphi_k(t) = \cos \left( \frac{2k-1}{2} \right) \frac{\pi}{T} t. \quad (4.35)$$

Якщо  $J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt$ , де  $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x_m(t)$ , то в (4.33) елементи

$$\alpha_{ij}^2 = \alpha_{ij}^3 / k_2 = \int_0^T [W_i(p)u(t)] [W_j(p)u(t)] dt.$$

Позначимо

$$W_i(p)u(t) = y_i(t), i = \overline{1, n},$$

де з урахуванням (4.34), (4.35)

$$y_{ij}(t) = W_i(p) \varphi_k(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} &= \int_0^T \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ik}(t) \right) \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k y_{jk}(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ik}, \end{aligned}$$

де  $y_{ik} = \int_0^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt$  розраховується заздалегідь.

Оптимальне значення  $\alpha$  знайдемо з умови

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in R} \left\| \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} - \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ij}^{kq} \right\|, \quad (4.36)$$

$$i, j = \overline{1, n},$$

де всі змінні, крім  $\alpha$ , заздалегідь розраховані.

Якщо розмірність  $\alpha$  дорівнює або більше  $0,5 r(r + 1)$ , то мінімум норми в (4.36) дорівнює нулю і маємо точну подібність варіацій функціоналів  $J$  та  $I$ .

Аналогічно попереднім, отримавши  $J$  і визначивши його варіацію від вектора  $\beta_\phi$  параметрів фільтра, підбираємо показник  $J_\phi$  якості фільтра  $(\Sigma_\phi \beta_\phi)$  з умови подібності (4.31), а показник  $J_{\text{пп}}$  якості первинних перетворювачів — подібним  $J_\phi$ , отриманому на попередньому кроці.

Зважаючи на складність аналітичного розв'язання задачі узгодження функціоналів конструктивним є підхід, що полягає у плануванні комп'ютерного експерименту.

Створення систем автоматизованого проектування (САПР) критеріїв ієрархічних систем за наявності відповідного математичного забезпечення істотно полегшує задачу. На ЕОМ послідовно імітуються підсистеми двох суміжних рівнів, починаючи з верхнього; здійснюється експеримент, направлений на визначення других варіацій функціоналів відносно їх екстремального значення; формується додатковий функціонал [типу (4.36)], що визначає близькість (подібність) других варіацій заданого (верхній рівень) і синтезованого (нижній рівень) функціоналів; додатковий функціонал оптимізується шляхом підстроювання параметрів підсистеми нижнього рівня.

Для скорочення варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [6]. Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, то за відомого значення екстремуму, для визначення других варіацій, необхідно і достатньо виконувати «зірковий експеримент», що полягає в почерговому відхиленні на величину «зоряного плеча»  $\pm\alpha$  кожної зі змінних, за якими знаходиться друга варіація функціоналу; якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, то оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2 \quad (4.37)$$

буде — центральний композиційний план Бокса [2, 11]. Цей план можна зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (4.37) приймають п'ять значень  $-0, +1, -1, +\alpha, -\alpha$ . План експерименту містить:

1) повний факторний — експеримент  $2^n$  або дрібні репліки (якщо  $n \gg 5$ );

2) «зірковий план»;

3) точку в центрі плану (усього  $N$  експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (4.37) перетворюють до виду

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_{j+} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2, \quad (4.38)$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} x_i^2, \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^2(k),$$

де  $k$  — номер досліджу.

Нові змінні  $\tilde{x}_i^2$  будуть зміщуватися на значення  $-c$ . Це дасть змогу підібрати  $\alpha$  так, щоб усі стовпці матриці експерименту були попарно ортогональні. Наприклад, для  $n = 3$  та моделі (4.37) матриця плану Боксу подана в табл. 4.4, де  $c = (1/15)$  2,  $\sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2)/15$  для будь-якого  $i$ .

Таблиця 4.4

Матриця оптимального плану експерименту на ЕТО

Вид плану	Нормовані змінні $X(k)$										
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$\tilde{x}_1^2$	$\tilde{x}_2^2$	$\tilde{x}_3^2$	$y(k)$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(1)$
	1	1	-1	-1	-1	-1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(2)$
	1	-1	1	-1	-1	1	-1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(3)$
	1	1	1	-1	1	-1	-1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(4)$
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(5)$
	1	1	-1	1	-1	1	-1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(6)$
	1	-1	1	1	-1	-1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(7)$
	1	1	1	1	1	1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(8)$
2	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2-c$	$-c$	$-c$	$y(9)$
	1	$\alpha$	0	0	0	0	0	$\alpha^2-c$	$-c$	$-c$	$y(10)$
	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2-c$	$-c$	$y(11)$
	1	0	$\alpha$	0	0	0	0	$-c$	$\alpha^2-c$	$-c$	$y(12)$
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2-c$	$y(13)$
	1	0	0	$\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	$\alpha^2-c$	$y(14)$
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	$y(15)$

«Зоряне плече»  $\alpha$  підбирають згідно з табл. 4.4 за умови ортогональності  $\tilde{x}_i^2$ :

$$\sum_{k=1}^N \tilde{x}_i^2(k) \tilde{x}_j^2(k) = 8(1-c)^2 - 4c(\alpha^2 - c) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для  $c$ , отримаємо  $\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1,5$ ,  $c \approx 0,83$ . Унаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти  $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ji}$ , моделі (4.38) визначають незалежно за методом найменших квадратів.

Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (4.37), а від неї до моделі з ненормованими змінними. Для цього  $\alpha_j$  — поділяють на модуль кроку варіювання  $i$ -ї змінної,  $\alpha_{ij}$  — на добуток цих модулів  $j$ -ї та  $i$ -ї змінної  $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i = j$ .

За наявності моделей функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів, нижній конструюють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів нижньої підсистеми за умови мінімуму додаткового функціонала різниці коефіцієнтів  $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ii}$  моделей (4.37) двох рівнів.

#### **4.2.2. Ідентифікація і оптимізація параметрів ЕТК на прикладі технологічного процесу виробництва кварцової трубки**

Щоб продукція українського виробника потрапила на світовий ринок і складала конкуренцію зарубіжним зразкам необхідно не просто автоматизувати процес її виробництва, а впровадити найбільш ефективні принципи керування: це адаптація систем управління до об'єкту керування на основі коректних методів його ідентифікації, адаптація процесу ідентифікації до нестаціонарності стохастичних процесів, що відбувається в об'єкті керування, адаптація еталонних моделей, оптимізація уставок та процесу стабілізації відповідних змінних ЕТК.

Розглянемо застосування цих принципів на прикладі АСУТП витягування кварцової трубки заданих діаметру  $d_{\text{вн}}$  і товщини стінки  $\delta_{\text{ст}}$  з склоблоку, що має відповідні зовнішній  $D_3$  і внутрішній  $D_{\text{вн}}$  діаметри (рис. 4.6).



ка, температуру  $t$  °C його, в'язкість  $\eta$  розігрітої скломаси або зусилля витягування (момент  $M(\eta)$ ).

Фізико-хімічна нестабільність блока виступає як стохастичне збурення, компенсувати дію якого зобов'язана система автоматичного керування.

### Математична модель системи в режимі «Робота»

Для обмежених відхилень від номінального режиму і інтервалу часу нелінійний нестаціонарний стохастичний процес, що протікає в об'єкті, може бути представлено стаціонарним векторно-матричним диференціальним оператором

$$L(t)X_b(t) = \tilde{L}(t)U(t) \quad (4.41)$$

або матричною передатною функцією  $W(s)$ , якщо скористуватись перетворенням Лапласу:

$$X_b(s) = W(s)U(s), \quad (4.42)$$

де  $X_b$  — вектор-функція вихідних величин об'єкта, а саме  $\delta_{ст}$ ,  $d_{вн}$ ,  $V_{бл}$ ,  $t^0$ ,  $M(\eta)$ ;  $U(s)$  — вхідних:  $U_{тр}$ ,  $P_{азота}$ ,  $V_{бл}^*$ , струму  $I$  нагрівача блока. На рис. 4.7 розкрито структуру  $W(s)$ , яка має перехресний зв'язок першого і другого каналів (передаточні функції  $W_{12}$  і  $W_{21}$ ). Вплив інших каналів на них враховано параметричним збуренням  $\xi$ , що діє на  $W_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , окрім цього мають місце сигнальні збурення від нестабільності  $\delta V_{бл}^*$  швидкості  $V_{бл}$  та вплив  $t^0$  на  $M(\eta)$ . Для їх компенсації система має ПП – регулятори по окремим каналам, а для розв'язки першого і другого додатково ввімкнено діагностувач  $W_g(s)$ . З умови, що

$$W_g(s)W(s) = diag W(s) \quad (4.43)$$

визначають оператори  $W_{ij}^g$  діагностувача:

$$W_{12}^g(s) = -W_{12}W_{11}^{-1}(s), \quad W_{21}^g(s) = -W_{21}W_{22}^{-1}(s). \quad (4.44)$$

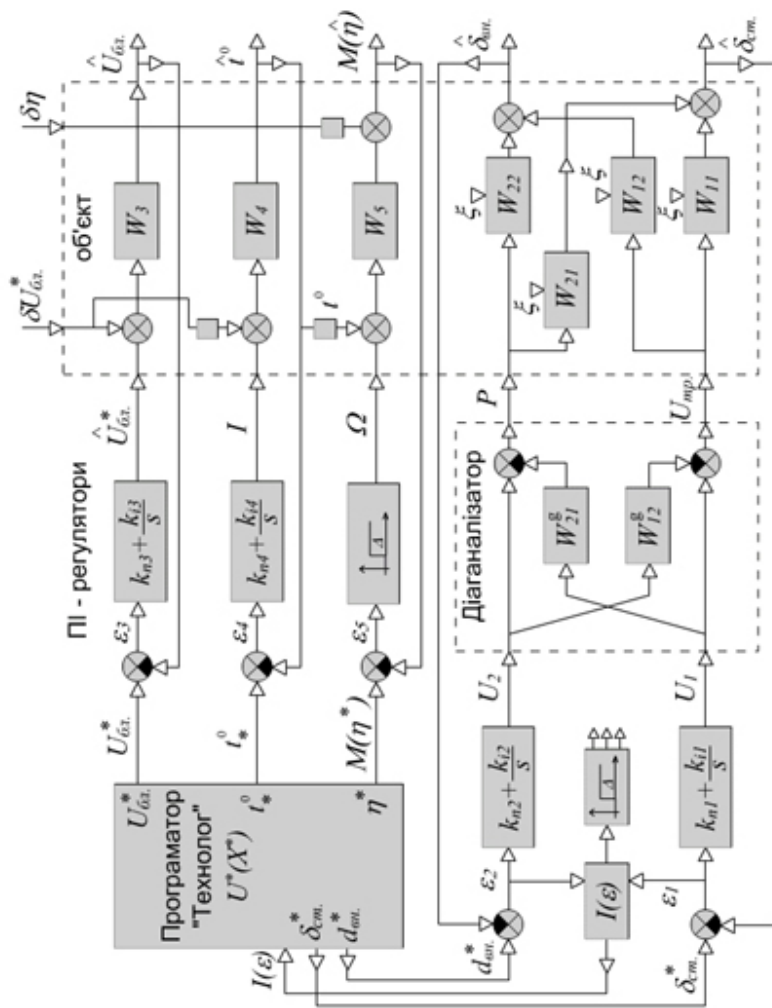


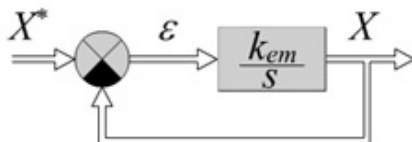
Рис. 4.7. Структурна схема системи керування в режимі «Робота»



Шляхом настроювання параметрів  $k_n$  і  $k_I$  ПІ-регулятора динаміка кожного з каналів наближається до динаміки еталонної моделі (рис. 4.7). Для цього за принципом мінімальної складності апроксимується відповідний канал об'єкта інерційного каналу першого порядку (рис. 4.8). Далі, за умови еквівалентності еталонної моделі (див. рис. 4.7) і САК і-го каналу, знаходять коефіцієнти ПІ-регулятора:

$$k_n = k_{em} k_{ii}^{-1} \tau_{ii}; \quad k_I = k_{em} k_{kk}^{-1}. \quad (4.45)$$

Блок  $I(\varepsilon)$  контролює якість вихідного продукту (відхилення діаметру і товщини трубки) і у випадку зниження якості система переходить в режим «Навчання».



Еталонна модель

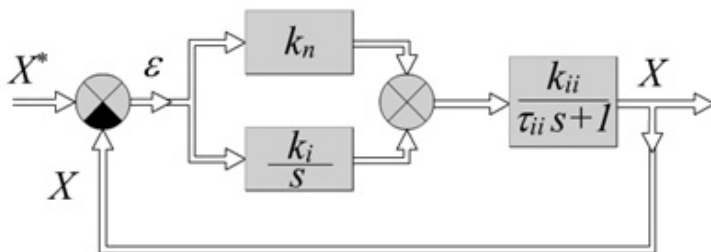


Рис. 4.8. САК з ПІ-регулятором

### Математична модель системи в режимі «Навчання»

Перехід з режиму «Робота» в режим «Навчання» здійснюється шляхом розмикання ключа 3 і замикання інших ключів (рис. 4.9). Тоді на об'єкт подається тільки програмний вплив  $U_0$ , а також тестуючий вплив  $\delta U$ . У блоці 7 визначається модель  $W_M(s)$

об'єкта і, відповідно до її параметрів, блоками 8, 9 настраюються за алгоритмом (6) діаганалізатор  $W_g(s)$  і за алгоритмом (7) ПІ-регулятори  $W_p(s)$ .

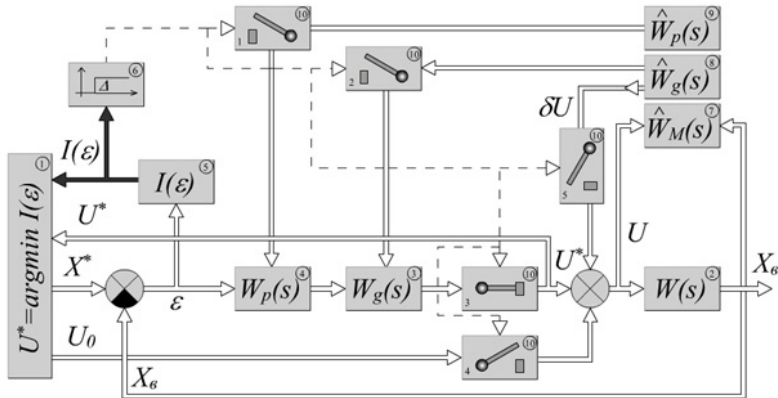


Рис. 4.9. Структурна схема системи

Режим «Навчання» обов'язково має місце на початку процесу витягування трубки, а також може виникати в процесі витяжки, якщо  $I(\varepsilon) > \Delta$ .

Розглянемо процес ідентифікації прямих  $W_{11}$ ,  $W_{22}$  і перехресних  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  операторів об'єкта на початку процесу витягування. Залежно від знаку відхилень  $d_{\text{вн}}$  і  $\delta_{\text{ст}}$  від номінальних значень, починаючи з плюс чи мінус, з блоку ідентифікатора подається взаємозалежна послідовність сходинок  $\Delta P$  і  $\Delta U_{\text{тр}}$ , амплітуда яких поступово зменшується (рис. 4.10).

В межах кожної сходинок перехідний процес  $\Delta d_{\text{вн}}(t)$  та  $\Delta \delta_{\text{ст}}(t)$  практично закінчується і описується експонентною. Тоді оцінка коефіцієнта  $\hat{k}_{ij}$ ,  $i=1,2$  визначається, як відношення приросту вихідної змінної  $j$ -го каналу  $\Delta x_j$  до приросту відповідної вхідної  $\Delta U_i$ , а оцінка сталої  $\hat{\tau}_{ij}$  часу — за робастним алгоритмом Тьюкі, як медіана упорядкованого по величині  $\tau_{ij}(k)$  ряду.

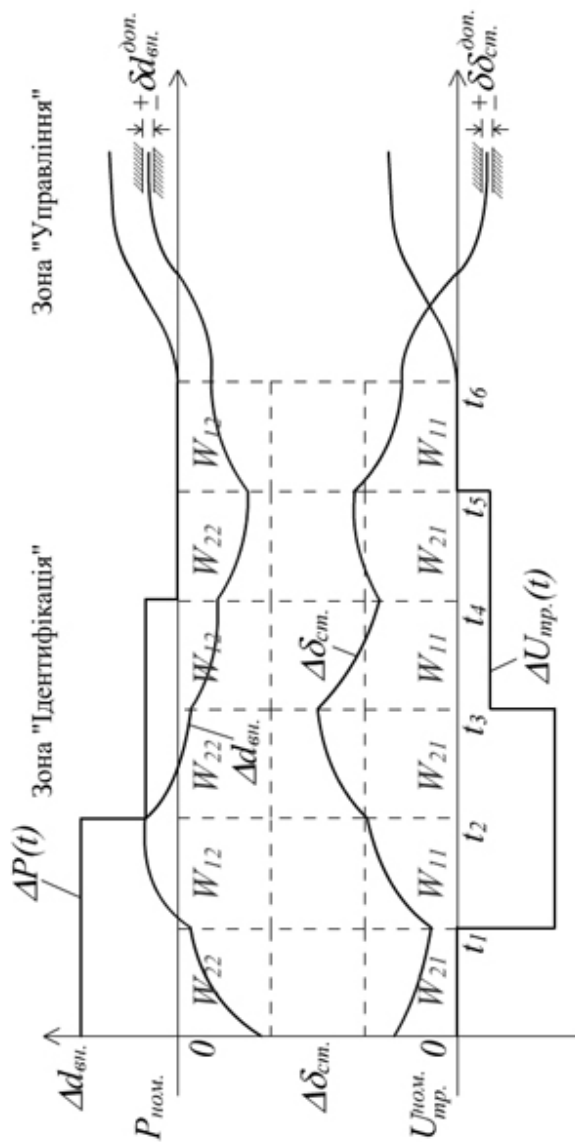


Рис. 4.10. Графіки перехідних процесів по  $d_{bn}$  і  $\delta_{ст}$

$$\hat{\tau}_{ij} = Me\{\tau_{ij}(k)\}, \quad (4.46)$$

де

$$\tau_{ij}(k) = -\frac{t_k}{\ln \left| \frac{\Delta x_j(t_k)}{\Delta x_j(t_n)} - 1 \right|},$$

$k = \overline{0, n}$  — дискретний час конкретної ділянки  $[t_l, t_{l+1}]$ ,  $l = \overline{0, 5}$ .

Подальше уточнення оцінок  $\hat{k}_{ij}$ ,  $\hat{\tau}_{ij}$  досягається лінійною апроксимацією їх у функції амплітуди тестуючого сигналу:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{ij}(\Delta P, \Delta U_{\text{тр}}) &= k_{ij}^* + a_1^{ij} \Delta P + a_2^{ij} \Delta U_{\text{тр}}; \\ \hat{\tau}_{ij}(\Delta P, \Delta \delta_{\text{тр}}) &= \tau_{ij}^* + b_1^{ij} \Delta P + b_2^{ij} \Delta U_{\text{тр}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Шуканими будуть  $k_{ij}^*$  і  $\tau_{ij}^*$ . По визначенню параметрів об'єкта по всіх каналах, настроюються параметри діагностизатора і регуляторів, ключі 1, 2, 4, 5 розмикаються, а ключ 3 підмикає САК до об'єкта, тобто система переходить у режим «Робота».

### **Робота системи в режимі ноніусного уточнення моделі об'єкта і алгоритму керування**

Якщо в режимі «Робота» функціонал  $I(\varepsilon)$  (рис. 4.9) суттєво менше  $\Delta$  і керуючі впливи змінюються несуттєво, то в підсистему «Технолог» поступає інформація про  $U^*$ , яка уточнює технологічну карту режимів, тобто співвідношення  $X_b^*(U^*)$  між номінальними значеннями вхідних і вихідних змінних об'єкта. Далі при цих значеннях  $U^*$  комутатор 3 (див. рис. 4.9) знов розмикається, а замикаються інші і система переходить в режим ноніусного уточнення моделі об'єкта.

Для цього з блоку 8 (див. рис. 4.9) на відповідні канали подаються взаємо- і автонекорельовані псевдовипадкові бінарні послідовості тестуючих сигналів (рис. 4.11) і за інтегрованим методом найменших квадратів (ІМНК) для згладжених даних уточнюються параметри  $k_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  базових моделей, визначається похибка апроксимації об'єкта базовими моделями і далі тим же методом оціню-

ється параметри уточнюючих операторів  $W_y$  ноніусних моделей за умови, що вже відомий — базовий. Наприклад, інертно-диференційний оператор каналу стабілізації температури:

$$W_y(s) = \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (4.48)$$

Тоді ноніусна модель набуває вигляду:

$$W_{M4} = \frac{k_4^*}{\tau_4^* s + 1} \cdot \frac{T_4 s + 1}{\tau_4 s + 1}. \quad (4.49)$$

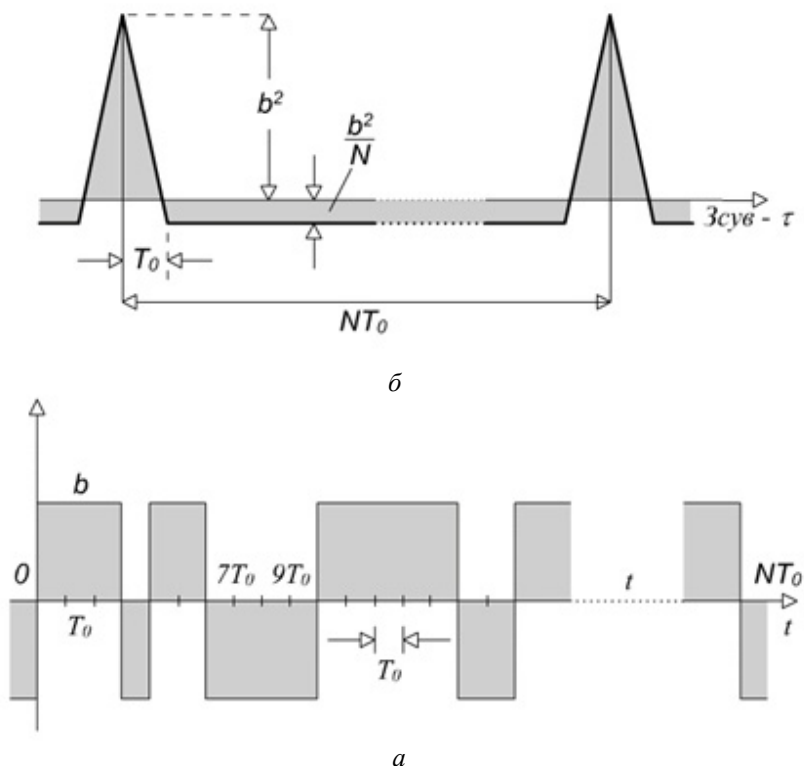


Рис. 4.11. Кореляційна функція (а) сигналу (б)

Щоб динаміка ЕТК відповідала еталонній відповідно коректується алгоритм управління шляхом підключення до ПІ-регулятора компенсуючої оператор  $W_y(s)$  ланки  $W_y^{-1}(s)$  (рис. 4.12).

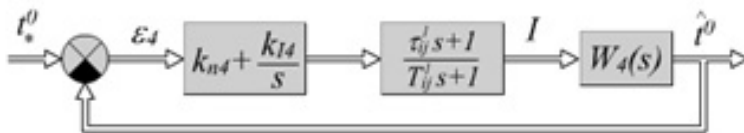


Рис. 4.12. Ноніусна корекція каналу стабілізації  $t^0$

У процесі ноніусної ідентифікації контролюється значення показника  $I(\varepsilon)$  і, при наближенні його до  $\Delta$ , система переходить у режим «Робота» з тою моделлю, яку вдалося визначити. Цим досягається адаптивність до нестационарності збурень: чим стаціонарніше процес, тим точніша модель і менше значення  $I(\varepsilon)$ . Але і за умови нестационарності система встигає побудувати базову просту модель і забезпечити стійкість і якість процесу керування.

Окрім цього, якщо  $I(\varepsilon) \ll \Delta$ , система може зменшувати інерційність еталонних моделей і відповідно каналів стабілізації технологічних параметрів, збільшуючи швидкодію. Тут також можна досягти скорочення кількості різних варіантів, застосовуючи методику планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціоналу від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються. Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію  $\Lambda$  ЕТК).

### 4.3. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в задачах діагностики аеродинаміки безпілотного літального апарату (БЛА)

Актуальною задачею є створення БЛА з електроживленням електродвигунів від сонячних батарей і іоністорних конденсаторів надвисоких ємностей.

#### **4.3.1. Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального керування льотними випробуваннями БЛА на стійкість і керованість**

Літальні апарати (ЛА) є складною динамічною системою, остаточне доведення якої можливе лише за результатами випробувань у польоті. Ефективне керування льотним експериментом можливе лише при високому ступені його автоматизації. У термінах загальної теорії систем [3] вважатимемо, що є ЕТК, що складається з об'єкта, вимірювального пристрою і пристрою керування (рис. 4.13).

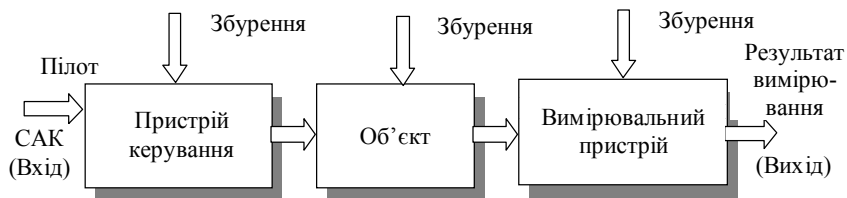


Рис. 4.13. Структурна схема системи

Недоліком відомих алгоритмів керування є слабе використання достовірної інформації про поточну динаміку об'єкта. Застосування принципів адаптації та ідентифікації в системі керування повинно суттєво збільшити ефективність її функціонування.

Бортова система (рис. 4.14) складається з таких компонентів: вимірювально-інформаційна система; бортова обчислювальна система; апаратура з'єднання.

До складу інформаційно-вимірювальної системи входить контрольно-вимірювальна апаратура таких систем:

- система метеовимірів, яка забезпечує необхідною інформацією про стан зовнішнього середовища та режиму польоту (швидкість  $V$ , висота  $H$ , швидкісний натиск  $q$  тощо);
- інерційно-навігаційна система, що забезпечує інформацією про кутові швидкості ЛА, кути атаки і ковзання, перевантаження;
- система бортових вимірювань, що повідомляє про витрату енергії, кути відхилення органів керування;
- система відображення для повідомлення оператору відомостей про кондиційність одержуваного в ході експерименту матеріалу, про оптимальні умови проведення експерименту (інформацію про оптимальне керування БЛА).

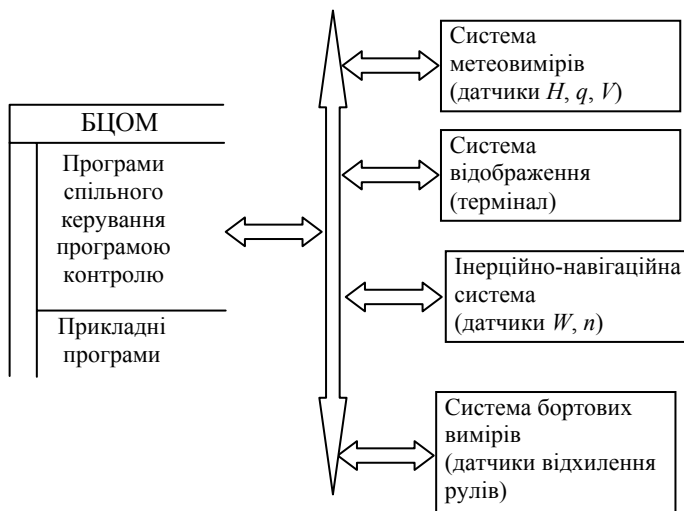


Рис. 4.14. Складові частини бортової системи

Бортова обчислювальна система забезпечує:

- аналіз кондиційності одержуваного в процесі льотного експерименту матеріалу;
- індикацію оператору всієї необхідної для якісного проведення експерименту інформації;
- обробку експериментального матеріалу;
- зберігання результатів експерименту;
- облік накопиченої інформації про модель об'єкта при плануванні наступного експерименту.

Апаратура з'єднання забезпечує циркуляцію інформаційних потоків у системі. Система (рис. 4.15) функціонує так:

1. Задаються параметри апріорної моделі і вимоги до точності ідентифікації, необхідні для синтезу оптимальних тестових сигналів.

2. Посилаючись на свідчення бортової системи вимірювань та системи метеовимірів, задаються дані для синтезу тестових сигналів та ідентифікації моделі щодо конкретного експерименту (швидкість  $V$ , висота  $H$ , швидкісний натиск  $q$ ). Задаються значення кута атаки, на яких проводитиметься експеримент.

3. За критеріями, що визначають точність ідентифікації параметрів, синтезуються оптимальні тестові сигнали.



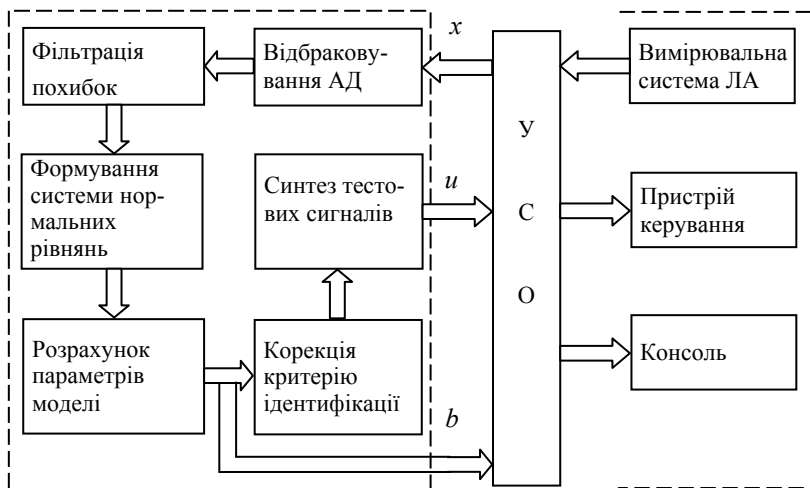


Рис. 4.15. Функціональна схема

4. За допомогою системи відображення оператору повідомляються необхідні для проведення експерименту дані.

5. Проводиться експеримент із первинною обробкою матеріалу у міру його надходження. Первинна обробка включає в себе відбраковування аномальних даних і фільтрацію перешкод вимірювань. З відфільтрованих даних рекурентно формується система нормальних рівнянь.

6. По закінченню експерименту обчислюються параметри моделі шляхом розв'язання системи нормальних рівнянь.

7. Приймається рішення про кондиційність експериментального матеріалу і про досягнення необхідної точності визначення параметрів. В іншому випадку здійснюється перехід до п. 2.

#### 4.3.2. Математичні моделі збуреного руху БЛА та їх декомпозиція

Якщо розглядати БЛА як тверде тіло сталої маси з площиною симетрії  $OXY$ , то в зв'язаній системі координат рівняння його руху в просторі мають наступний вигляд:

$$m(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x) = z + mg \cos \vartheta \sin \gamma, \quad (4.50)$$

$$I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z + I_{xy} (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) = M_x, \quad (4.51)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x - I_{xy} (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) = M_y, \quad (4.52)$$

$$m (\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y) = P_x - x + mg \sin \vartheta, \quad (4.53)$$

$$m (\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z) = P_y - y_{\text{аер}} - mg \cos \vartheta, \quad (4.54)$$

$$I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y - I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) = M_{z_{\text{аер}}} + M_{z_{\text{дв}}}, \quad (4.55)$$

де  $I_x, I_y, I_z$  — осьові;  $I_{xy}$  — відцентровий момент інерції;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — кутові швидкості крену, ристання і тангажу;  $m$  — маса ЛА;  $\vartheta, \gamma$  — кути крену і тангажу;  $V_x, V_y, V_z$  — складові вектора швидкості ЛА;  $x$  — лобовий опір;  $y_{\text{аер}}$  — піднімальна сила;  $P_x, P_y$  — складові вектора тяги;  $M_{z_{\text{дв}}}$  — гіроскопічний момент двигуна;  $z$  — поперечна сила;  $M_x, M_y, M_z$  — аеродинамічні моменти щодо відповідних осей.

Вирази (4.50)–(4.55) складають собою систему нелінійних диференціальних рівнянь. Для отримання рівнянь, що дозволяють розв'язати задачу ідентифікації стійкості і керованості БЛА, скористаємося принципом лінеаризації рівнянь руху за допомогою методу малих збурень.

Відповідно до цього методу вважатимемо, що кінематичні параметри збуреного руху БЛА мало відрізняються від параметрів опорного руху в одні і ті ж моменти часу.

Нелінійні залежності за допомогою розкладання в ряд Тейлора можна наближено зобразити у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь, яка описує збурений рух БЛА, як відхилення від опорного руху.

Умова малості відхилення  $\Delta x$  кінематичних параметрів дозволяє вважати, що

$$\cos \Delta x \approx 1; \sin \Delta x \approx \Delta x; \Delta x = \{\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma\}.$$

До рівнянь (4.50)–(4.55) входять аеродинамічні сили й моменти:

$$x = c_x q S; \quad y = c_y q S; \quad z = c_z q S;$$

$$M_x = m_x(\alpha) q S l; \quad M_y = m_y(\alpha) q S l; \quad M_z = m_z(\alpha) q S b_A,$$

де  $q$  — швидкісний напір;  $S$  — площа крила;  $l$  — розмах крила;  $b_A$  — середня аеродинамічна хорда крила.

У загальному випадку коефіцієнти аеродинамічних сил і моментів є функцією кута атаки  $\alpha_0$ . Вибираючи як опорний рух режими з фіксованими кутами атаки  $\alpha_0$ , можна вважати, що коефіцієнти  $c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$  стаціонарні. Вважаємо

$$\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega_z^0 = 0.$$

Покладемо також, що бічний і поздовжній рухи не впливають один на одного. Для цього маневр у бічному русі виконується при майже постійному  $\alpha$ , а в поздовжньому — при нульових відхиленнях змінних бокового руху.

Ізольований бічний рух (БР) можливий за таких обмежень, які доповнюють наведені вище  $\Delta\omega_z = 0$ ;  $V = \text{const}$ ;  $\sin \Delta\beta \approx \beta$ ;  $\cos \Delta\beta \approx 1$ , де  $\beta$  — кут ковзання ЛА. З урахуванням цих обмежень і, використовуючи співвідношення  $V_x = V \cos \beta \cos \alpha$ ;  $V_y = -V \cos \beta \sin \alpha$ ;  $V_z = V \sin \beta$ , з (4.50)–(4.52) отримаємо:

$$\dot{\beta} = \cos \alpha \omega_y + \sin \alpha \omega_z + \frac{z}{mV},$$

$$I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y = M_x, \quad (4.56)$$

$$I_y \dot{\omega}_y - I_{yx} \dot{\omega}_x = M_y, \quad (4.57)$$

де  $\frac{z}{mV}$  — наведена поперечна сила:

$$\frac{z}{mV} = \frac{z_{\text{аер}} + mg \cos \vartheta \sin \gamma}{mV} = \frac{g}{V} n_z + \frac{g}{V} \cos \vartheta \sin \gamma, \quad (4.58)$$

де  $n_z$  — бічне перевантаження.

$$\Delta c_z = c_z^\beta \Delta\beta + c_z^{\beta_H} \Delta\delta_H + c_z^{\delta_e} \Delta\delta_e \quad (4.59)$$

$$m_x = m_x^{\bar{\omega}_x} \Delta\bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \Delta\bar{\omega}_y + m_x^\beta \Delta\beta + m_x^{\delta_H} \Delta\delta_H + m_x^{\delta_e} \Delta\delta_e, \quad (4.60)$$

$$m_y = m_y^{\bar{\omega}_x} \Delta\bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \Delta\bar{\omega}_y + m_y^\beta \Delta\beta + m_y^{\beta_H} \Delta\delta_H + m_y^{\delta_e} \Delta\delta_e. \quad (4.61)$$

З огляду на це, а також на те, що поперечне перевантаження дорівнює  $n_z = c_z q S / mg$ , із (4.56)–(4.58) отримаємо:

$$\begin{aligned} \left( I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y \right) \frac{1}{qSl} &= m_x^{\bar{\omega}_x} \Delta\bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \Delta\bar{\omega}_y + \\ &+ m_x^\beta \Delta\beta + m_x^{\delta_H} \Delta\delta_H + m_x^{\delta_e} \Delta\delta_e, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} (I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x) \frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}_x} \Delta \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \Delta \bar{\omega}_y + \\ + m_y^{\beta} \Delta \beta + m_y^{\delta_n} \Delta \delta_n + m_y^{\delta_e} \Delta \delta_e, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\Delta n_z \frac{mg}{qS} = c_z^{\delta} \Delta \beta + c_z^{\delta_n} \Delta \delta_n + c_z^{\delta_e} \Delta \delta_e, \quad (4.64)$$

де  $\delta_n, \delta_e$  — кути відхилення руля напрямку і елеронів;

$\bar{\omega}_{x,y} = \frac{l}{2V} \omega_{x,y}$  — безрозмірні кутові швидкості крену і ристання.

### ***4.3.3. Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі бічного руху БЛА***

Проблема мультиколеніарності змінних одна з найважливіших при ідентифікації похідних стійкості і керованості. Майже лінійна залежність фазових змінних ЛА змушує шукати такі умови експерименту, за яких ця залежність виявляється найменшою мірою. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з вибором таких тест-сигналів, щоб інформаційна матриця експерименту мала певну структуру.

Однією з особливостей реалізації тест-сигналів на борту БЛА є те, що вони можуть вироблятися за допомогою системи автоматичного керування (САК). Це накладає додаткові обмеження на клас припустимих керувань:

1. Прийнятність для САК. Вхідні сигнали не повинні виводити БЛА в область аварійних польотних режимів.

2. Обмеження, що накладаються на міцність конструкції БЛА: маневри, що здійснюються БЛА і модельовані за допомогою вхідних сигналів, не повинні призводити до навантажень, які перевищували б допустимі.

Форму тест-сигналу руля керування наведено на рис. 4.16.

$$\beta = \cos \alpha \omega_y + \sin \alpha \omega_z + \frac{z}{mV};$$

$$I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y = M_x;$$

$$I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x = M_y.$$

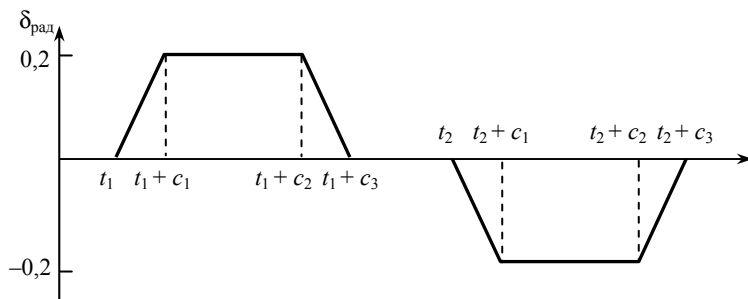


Рис. 4.16. Тестові сигнали для ідентифікації каналу бічного руху БЛА

Тестові сигнали не повинні створювати надмірних прискорень і істотно змінювати положення БЛА з метою збереження припущень щодо лінеаризації. Для моделі легкого маневреного БЛА вводилися такі обмеження:

$$|\Delta\beta| \leq 14^\circ, \quad |\Delta\omega_x| \leq 10 \text{ град/с}, \quad |\Delta\omega_z| \leq 6 \text{ град/с}.$$

Для успішної відтворюваності сигналів САК накладаються обмеження на їх взаємне розташування:

$$t_j^i - t_l^k \geq \Delta t \in \Delta T_c; \quad t_k - t_1' T_{\text{експ}};$$

$$i, k = 1, 2, \quad j \in L_j, \quad l \in L_l.$$

Остання нерівність пов'язана з обмеженням на тривалість експерименту.

Момент подачі першого імпульсу  $[\delta_n]$  фіксований. Моменти подачі інших імпульсів  $[\pm\delta_n, -\delta_n]$  задаються відносно першого.

На рис. 4.17 показано тест-сигнали, оптимальні за критерієм:  $\Phi = \max \det M$ , де  $M$  — інформаційна матриця експерименту.

Оцінки для оптимального за  $\Phi$ -критерієм і керування наведено в табл. 4.5.

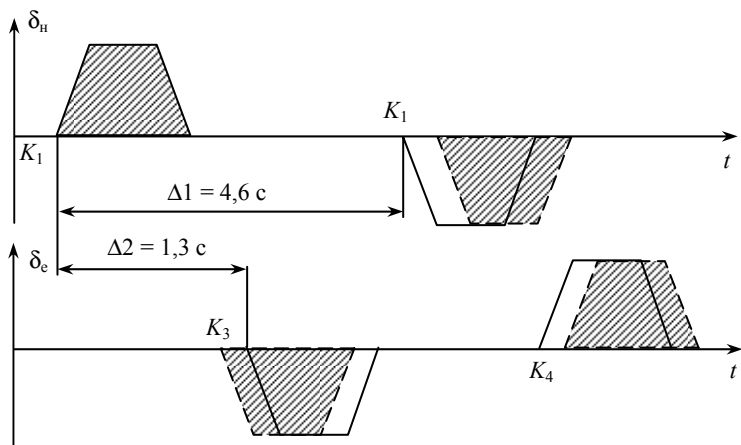


Рис. 4.17. Уточнення тестових сигналів за даними експерименту

Таблиця 4.5

#### Ідентифікація за $\Phi$ -критерієм

Параметри	$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	$m_x^{\beta}$	$m_x^{\delta_H}$	$m_x^{\delta_e}$
	-0,36204	-0,07159	-0,07655	-0,00516	-0,05501
	$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_H}$	$m_y^{\delta_e}$
	-0,36204	-0,07159	-0,07655	-0,00516	-0,05501
	—	—	$c_z^{\beta}$	$c_z^{\delta_H}$	$c_x^{\delta_e}$
	—	—	1,02887	-0,6232	0,00194

#### 4.3.4. Корекція критеріїв якості експерименту

Необхідна для побудови цілеорієнтованої моделі матриця других похідних критерію верхнього рівня  $I(\beta)$  в даному випадку задається діагональною матрицею  $I''(\beta) = \text{diag}(a_1, \dots, a_m)$ , де величини  $a_i$  визначаються необхідною точністю оцінки параметрів. Оскільки задача ідентифікації параметрів моделі БЛА є погано обумовленою, то домогтися в одному експерименті необхідної точності для всіх оцінок параметрів не вдається. Для подолання цих труднощів використовується алгоритм покоординатної оптимізації. Критерій покоординатної оптимізації для оцінки  $k$ -го параметра при використанні норми Гельдера має такий вигляд:

$$\Phi_k^p = \min_j \|j_k - i_k\|_p = \min \left( \sum_{i=1}^m |j_{kl} - i_{kl}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.65)$$

де  $j_{kl}, i_{kl}$  — елементи  $k$ -го рядка матриць  $J > (\beta)$  і  $I > (\beta)$  відповідно;  $p$  — показник норми.

Оскільки матриця для  $I(\beta)$  діагональна, то критерій (4.65) набуває вигляду:

$$\Phi_k^p = \min \left( \sum_{l=1}^{m-1} |j_{kl}|^p + |j_{kk} - a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.66)$$

При використанні норми з показником  $p = 1$  можна вираз (4.66) ще спростити:

$$\Phi_k = \min_j \left( \sum_{i=1}^m |j_{ki}| - a_k \right). \quad (4.67)$$

У табл. 4.6 наведено результати ідентифікації з використанням алгоритмів покоординатної оптимізації.

Алгоритм корекції критеріїв ідентифікації має вигляд:

— за продувними в аеродинамічній трубі даними синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм  $\Phi = \max \det M$ ;

— для уточнення кожного з параметрів синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм покоординатної оптимізації

$$\Phi_k = \min_j \sum_{i=1}^m |j_{ki}| - a_k.$$

Таблиця 4.6

**Ідентифікація параметрів за критеріями  
покоординатної оптимізації**

Параметри моделі	$m_x^{\bar{0}_x}$	$m_x^{\bar{0}_y}$	$m_x^\beta$	$m_x^{\delta_H}$	$m_x^{\delta_e}$
	−0,358	−0,073	−0,0751	−0,00516	−0,055
	$m_y^{\bar{0}_x}$	$m_y^{\bar{0}_y}$	$m_y^\beta$	$m_y^{\delta_H}$	$m_y^{\delta_e}$
	−0,068	−0,037	−0,139	−0,034	0,01012
	—	—	$c_z^\beta$	$c_z^{\delta_H}$	$c_x^{\delta_e}$
	—	—	1,02911	−0,06271	0,00021

У табл. 4.7 наведено справжні параметри моделі БЛА (4.56)–(4.57). Як бачимо, оцінки АДК за критерієм (4.64) ближчі до точних АДК, ніж оцінки за критерієм  $\Phi$ .

Таблиця 4.7

**Справжні параметри системи**

$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_n}$	$m_y^{\delta_e}$
–0,3500	–0,64631	–0,075	–0,00516	–0,055
$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	$m_y^{\beta}$	$m_y^{\delta_n}$	$m_y^{\delta_e}$
–0,070	–0,42537	–0,140	–0,0344	0,010
–	–	$c_z^{\beta}$	$c_z^{\delta_n}$	$c_x^{\delta_e}$
–	–	1,030	–0,063	0,00

#### 4.3.5. Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бічного руху БЛА

У процесі композиції відновлюється характер залежності коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів від кута атаки, роблячи можливим перехід від лінійних відносно шуканих коефіцієнтів моделей (4.62)–(4.64) до більш повних моделей, де АДК — функції кута атаки  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \left(I_x \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y\right) \frac{1}{qSl} = m_x^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_y + m_x^{\beta}(\alpha) \beta + \\ + m_x^{\delta_n}(\alpha) \delta_n + m_x^{\delta_e}(\alpha) \delta_e; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(I_y \dot{\omega}_y - I_{xy} \dot{\omega}_x\right) \frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_y + m_y^{\beta}(\alpha) \beta + \\ + m_y^{\delta_n}(\alpha) \delta_n + m_y^{\delta_e}(\alpha) \delta_e; \end{aligned}$$

$$\Delta n_z \frac{mg}{qS} = c_z^{\beta}(\alpha) \beta + c_z^{\beta_n}(\alpha) \delta_n + c_z^{\beta_e}(\alpha) \delta_e.$$

Для невеликого діапазону змін кута атаки БЛА характер залежностей досить точно апроксимувався по МНК лінійними моделями:



$$\begin{aligned}
m_{\bar{x}^x}(\alpha) &= -0,64 + 0,024\alpha; & m_{\bar{y}^y}(\alpha) &= -0,66; \\
m_{\bar{x}^\beta}(\alpha) &= -0,143 + 0,0095\alpha; & m_{\bar{x}^{\delta^H}}(\alpha) &= -0,068 + 0,0047\alpha; \\
m_{\bar{x}^{\delta^e}}(\alpha) &= -0,068 + 0,0027\alpha; & m_{\bar{y}^x}(\alpha) &= -0,21; \\
m_{\bar{y}^y}(\alpha) &= -0,565 + 0,064\alpha; & m_{\bar{y}^\beta}(\alpha) &= -0,124 + 0,01\alpha; & (4.68) \\
m_{\bar{y}^{\delta^H}}(\alpha) &= -0,14 + 0,01\alpha; & m_{\bar{y}^{\delta^e}}(\alpha) &= -0,018; \\
c_{\bar{z}^\beta}(\alpha) &= -1,41 + 0,097\alpha; & c_{\bar{z}^{\delta^H}}(\alpha) &= -0,36 + 0,025\alpha; \\
c_{\bar{z}^{\delta^e}}(\alpha) &= -0,045 + 0,0032\alpha.
\end{aligned}$$

Деякі графіки отриманих залежностей зображено на рис. 4.18. Там же показано значення оцінок параметрів часткових моделей з використанням як оптимальних, так і неоптимальних вхідних сигналів.

Як бачимо, оптимізація тест-сигналів суттєво зменшує розкид точок відносно ліній регресії, а значить, і розкид оцінок коефіцієнтів. Середньоквадратична міра близькості перехідних процесів моделі і реального БЛА

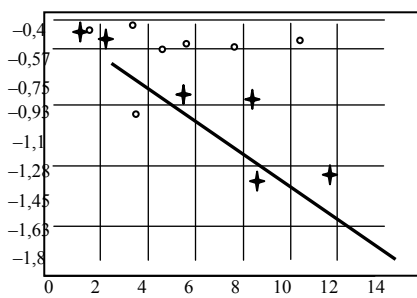
$$S = \int_T (x_0 - x_m)^2 dt. \quad (4.69)$$

Для моделі з коефіцієнтами, отриманими з використанням оптимальних за (4.67) сигналів,  $S = 0,87$ ; для моделі з коефіцієнтами, отриманими за Ф-критерієм  $S = 12,4$ .

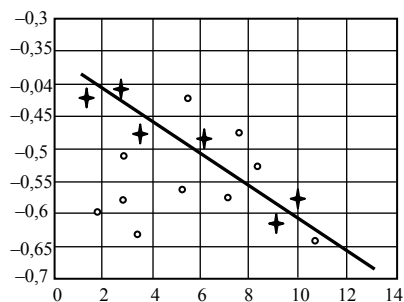
Таким чином, якщо є необхідність у високій точності оцінювання окремих АДК БЛА, то доцільно для кожного АДК виконувати режим, оптимальний за критерієм (4.67).

Це задача параметричної ідентифікації. Якщо ж треба забезпечити тільки мінімум критерію (4.69), то достатньо D-оптимального плану експерименту.

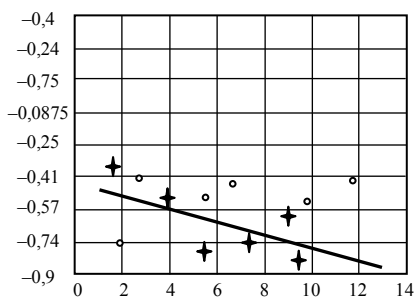
Однак, для **оптимального за мінімумом витрат електроенергії** керування БЛА та запобігання аварійним режимам важливо якомога точніше визначення АДК і, як наслідок, точніше відстеження заданої траєкторії руху БЛА та економія електроенергії, яка подається від бортового акумулятора.



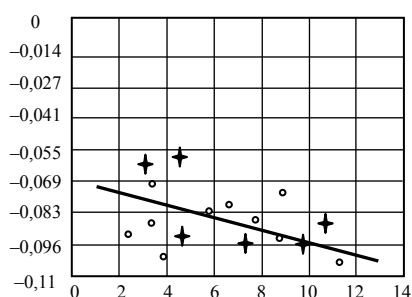
$$C_z^{\beta}(\alpha) = -1,41 + 0,097\alpha$$



$$C_z^{\delta_n}(\alpha) = -1,41 + 0,097\alpha$$



$$C_z^{\delta_{\epsilon}}(\alpha) = -0,045 + 0,0032\alpha$$



$$C_x^{\delta_{\epsilon}}(\alpha) = -0,068 + 0,0027\alpha$$

Рис. 4.18. Апроксимація залежності оцінок аеродинамічних коефіцієнтів від кута атаки БЛА за  $D$ -критерієм (точки) та критерієм (4.67) (хрестики), де  $a$  — залежність  $C_z^{\beta}(\alpha)$ ;

$b$  — залежність  $C_z^{\delta_n}(\alpha)$ ;  $v$  — залежність  $C_z^{\delta_{\epsilon}}(\alpha)$ ;

$z$  — залежність  $C_x^{\delta_{\epsilon}}(\alpha)$

#### Список літератури до розділу 4

1. Бідюк П. І. Методи прогнозування / П. Бідюк, О. Меньяйленко, О. Половцев. — Т 2. — Луганськ : Альма-матер, 2008. — 305 с.
2. Ивахненко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами / А. Г. Ивахненко. — К. : Техніка, 1975. — 250 с.
3. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 380 с.
4. Костюк В. И. Многократно адаптивная система идентификации МАСИ-1 и ее применение / В. И. Костюк, А. Н. Сильвестров, А. Ю. Юдин. — Вестник КПИ / Техническая кібернетика, 1980, №4. — С. 41–48.
5. Кринецкий Л. И. Лётные испытания систем управления ракетами / Л. И. Кринецкий. — М. : Машиностроение, 1980. — 400 с.
6. Круг Г. К. Планирование эксперимента в идентификации и екстарполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. — М. : Наука, 1977. — 280 с.
7. Пухов Г. Е. Модели технологических процессов / Г. Е. Пухов, Ц. С. Хатиашвили. — К. : Техніка, 1974. — 200 с.
8. Сільвестров А. М. Багатократно адаптивні системи ідентифікації / А. М. Сільвестров, О. М. Панченко. — К. : Техніка, 1983. — 110 с.
9. Сільвестров А. М. Цілеспрямовані системи ідентифікації / А. М. Сільвестров, В. М. Синєглазов. — К. : УМКВО, 1989. — 110 с.
10. Тихонов А. Н. О решении не коректно поставленных задач / А. Н. Тихонов. — ДАН СССР, 1963, №3. — С. 131.
11. Тихонов А. Н. Методы решения не коректных задач / А. Н. Тихонов, В. А. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 250 с.

## РОЗДІЛ 5

### НОВІ МЕТОДИ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ЕТО

#### 5.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки ЕТО

Динаміка збуреного руху ЕТО описується нелінійною динамічною моделлю. У такій ситуації основною похибкою оцінок параметрів лінійної складової моделі є їх зміщення внаслідок наближеності лінійної моделі, яка не враховує нелінійність характеристик ЕТО.

Розумним компромісом між лінійною моделлю ЕТО (справедливою для малих відхилень), і нелінійною (справедливою для більших відхилень), буде модель ЕТО, представлена першими і другими членами розкладання нелінійної моделі в ряд Тейлора відносно базового режиму.

##### 5.1.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму

Для моменту  $m$  електродвигуна постійного струму шляхом розкладання в обмежений другими похідними ряд Тейлора відносно моменту часу  $t_0$ , як функції струму якоря  $I_{\text{я}}$ , струму  $I_3$  збудження магнітного потоку і напруги  $U_{\text{я}}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} m(t) = & m(t_0) + \left. \frac{\partial m}{\partial I_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial I_3} \right|_{t_0} \Delta I_3(t) + \left. \frac{\partial m}{\partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta U_{\text{я}}(t) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}}^2} \right|_{t_0} (\Delta I_{\text{я}}(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_3^2} \right|_{t_0} (\Delta I_3(t))^2 + \left. \frac{\partial^2 m}{\partial U_{\text{я}}^2} \right|_{t_0} (\Delta U_{\text{я}}(t))^2 + \right. \\ & + \left. \left. \left. \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}} \partial I_3} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) \Delta I_3(t) + \frac{\partial^2 m}{\partial I_{\text{я}} \partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_{\text{я}}(t) \Delta U_{\text{я}}(t) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 m}{\partial I_3 \partial U_{\text{я}}} \right|_{t_0} \Delta I_3 \Delta U_{\text{я}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Така модель враховує несиметрію режимів розгону і гальмування для обмежених відхилень. Але велика кількість її членів (дев'ять), серед яких тільки  $\Delta U_{\text{я}}$  незалежна змінна, а інші, з урахуванням взаємозв'язку їх рівнянням двигуна, її наслідки; взаємна корельованість, обмеженість і наближеність вимірювань відхилень, обмеженість часу одного режиму, роблять завдання оцінювання всіх коефіцієнтів некоректним внаслідок фізичної неможливості забезпечення лінійної незалежності змінних і статистично достатньої довжини вибірок [3, 12].

Відповідно до мети експерименту треба визначити перші три лінійні члена розкладання (5.1), тобто лінійна модель в області малих відхилень від бажаного режиму роботи ДПС. Для точного їх оцінювання сплануємо натурний експеримент за наступною схемою. Нехай всі відхилення змінних рівняння (5.1) будуть близькі за формою:  $\Delta U_{\text{я}}(t)$  — «сходінка»;  $\Delta I_{\text{я}}(t)$ ,  $\Delta I_3(t)$  — відповідно до рівнянь динаміки експоненціальні функції-реакції ДПС на вплив  $U_{\text{я}}(t)$ .

Перепишемо вираз (5.1) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta m(t) = & \\ = & \left[ m^{I_{\text{я}}} + \left( m^{I_{\text{я}}^2} \Delta I_{\text{я}}(t) + m^{I_{\text{я}} I_3} \Delta I_3(t) + m^{I_{\text{я}} U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(t) \right) \right] \Delta I_{\text{я}}(t) + \\ & + \left[ m^{I_3} + \left( m^{I_{\text{я}} I_3} \Delta I_{\text{я}}(t) + m^{I_3^2} \Delta I_3(t) + m^{I_3 U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(t) \right) \right] \Delta I_3(t) + \\ & + \left[ m^{U_{\text{я}}} + \left( m^{U_{\text{я}} I_{\text{я}}} \Delta I_{\text{я}}(t) + m^{U_{\text{я}} I_3} \Delta I_3(t) + m^{U_{\text{я}}^2} \Delta U_{\text{я}}(t) \right) \right] \Delta U_{\text{я}}(t), \end{aligned} \quad (5.2)$$

де кожний коефіцієнт складається з шуканого  $i$  лінійної функції від  $\Delta I_{\text{я}}$ ,  $\Delta I_3$ ,  $\Delta U_{\text{я}}$ . Якщо з певним досить грубим ступенем наближення у виразах для коефіцієнтів рівняння (5.2)  $\Delta I_{\text{я}}(t)$ ,  $\Delta I_3(t)$ ,  $\Delta U_{\text{я}}(t)$  замінити відповідними ступінчастими функціями

$$\Delta I_{\text{я}}(\infty)1(t), \Delta I_3(\infty)1(t), \Delta U_{\text{я}}(\infty)1(t),$$

де аргумент  $(\infty)$  відповідає часу появи сталого значення  $\Delta I_{\text{я}}(t)$ ,  $\Delta I_3(t)$ ,  $\Delta U_{\text{я}}(t)$ , то, з точністю до цього наближення, рівняння (5.2) можна подати у наступному вигляді:

$$\Delta m_{z_1}(t) \cong a_1 \Delta I_3(t) + a_2 \Delta I_{\text{я}}(t) + b_1 \Delta U_{\text{я}}(t), \quad (5.3)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= m^{I_3} + \left[ m^{I_{\text{я}}I_3} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{I_3^2} \Delta I_3(\infty) + m^{I_3U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(\infty) \right], \\ a_2 &= m^{I_{\text{я}}} + \left[ m^{I_{\text{я}}^2} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{I_{\text{я}}I_3} \Delta I_3(\infty) + m^{I_{\text{я}}U_{\text{я}}} \Delta U_{\text{я}}(\infty) \right], \\ b_1 &= m^{U_{\text{я}}} + \left[ m^{U_{\text{я}}I_{\text{я}}} \Delta I_{\text{я}}(\infty) + m^{U_{\text{я}}I_3} \Delta I_3(\infty) + m^{U_{\text{я}}^2} \Delta U_{\text{я}}(\infty) \right]. \end{aligned}$$

Чим ближче форма сигналів до «сходинки», тим точніше рівняння (5.3), але і тим гірше обумовленість інформаційної матриці МНК.

У силу взаємозв'язку змінних  $\Delta I_{\text{я}}$ ,  $\Delta I_3$ ,  $\Delta U_{\text{я}}$  управляти «ступінчастістю» немає можливості.

Але змінюючи амплітуду  $\Delta U_{\text{я}}(\infty)$ , ми можемо пропорційно змінювати зсув коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  відносно шуканих часткових похідних  $m^{I_3}$ ,  $m^{I_{\text{я}}}$ ,  $m^{U_{\text{я}}}$ .

Тоді, альтернативна до ортогональної, постановка експерименту буде полягати в подачі послідовності сходенок напруги  $U_{\text{я}}$  різної амплітуди, визначення зміщених коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  рівняння (5.3) і ліквідації цього зміщення шляхом лінійної апроксимації коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  у функції  $\Delta U_{\text{я}}(\infty)$ ,  $\Delta I_{\text{я}}(\infty)$  або  $\Delta I_3(\infty)$ .

Наприклад:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= m^{I_3} + k_1 \Delta I_{\text{я}i}(\infty); \\ a_{2i} &= m^{I_{\text{я}}} + k_2 \Delta I_{\text{я}i}(\infty); \\ b_{1i} &= m^{U_{\text{я}}} + k_3 \Delta I_{\text{я}i}(\infty), \end{aligned} \quad (5.4)$$

де  $i$  — номери сходенок різної амплітуди.

У загальному випадку  $i$ -й рядок векторно-матричного рівняння руху ДПС, як ЕТО, що враховує лінійні та квадратичні члени розкладання має вигляд:

$$\Delta y_i = \Delta X A_i + \Delta X B_i \Delta X^T, \quad (5.5)$$

де

$$\Delta y_i^T = [\Delta y_i(1), \Delta y_i(2), \dots, \Delta y_i(N)]; \quad A_i^T = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}];$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1(1) & \Delta x_2(1) & \dots & \Delta x_n(1) \\ \Delta x_1(2) & \Delta x_2(2) & \dots & \Delta x_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_1(N) & \Delta x_2(N) & \dots & \Delta x_n(N) \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i12} & \dots & b_{i1n} \\ b_{i21} & b_{i22} & \dots & b_{i2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{in1} & b_{in2} & \dots & b_{inn} \end{bmatrix};$$

де  $N$  і  $n$  — відповідно числа дискретів за часом і розмірністю вектора  $A_i$ . Зміщена внаслідок неврахування квадратичної форми  $\Delta X B_i \Delta X^T$  МНК-оцінка  $\hat{A}_i$  дорівнює:

$$\hat{A}_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta y_i. \quad (5.6)$$

Її зсув буде пропорційний  $\Delta X^T$ :

$$\hat{A}_i - A_i = (\Delta X^T \Delta X)^{-1} \Delta X^T \Delta X B_i \Delta X^T = B_i \Delta X^T.$$

У загальному випадку модель (5.5) повинна бути розширена членами третього і вище порядку, і залежність зміщення оцінок від  $\Delta X$  буде носити нелінійний характер. Тому для ефективної реалізації цього підходу слід обмежити знизу і зверху діапазони зміни  $\Delta X$ . Для ілюстрації доцільності такого підходу розглянемо приклад.

### 5.1.2. Тестовий приклад

Точна нелінійна модель ЕТО

$$y(k) = \sum_{j=1}^3 x_j(k) + \sum_{j,q=1, j \neq q}^3 x_j(k) x_q(k) \quad (5.7)$$

з одиничними коефіцієнтами  $\beta$ , для чотирьох вибірок різної амплітуди  $X_{\max}$ , апроксимувалася її лінійною частиною за таких сигналів:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), & x_2(k) &= x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \\ x_3(k) &= x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right), & k &= \overline{1, M}, l = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Оцінки  $\hat{\beta}_j$  ( $j=1,2,3$ ) обчислювалися методом найменших квадратів. При цьому показник  $\varepsilon^T \varepsilon$  похибки  $\varepsilon$  апроксимації  $y(k)$  лінійною моделлю  $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$  був на 2 порядки менше аналогічної норми  $\|\Delta y\|$ .

Тобто задача апроксимації лінійною моделлю вирішується достатньо якісно. Але коефіцієнти  $\hat{\beta}_i$  відносно істинних (одиничних) були істотно зміщені (рис. 5.1).

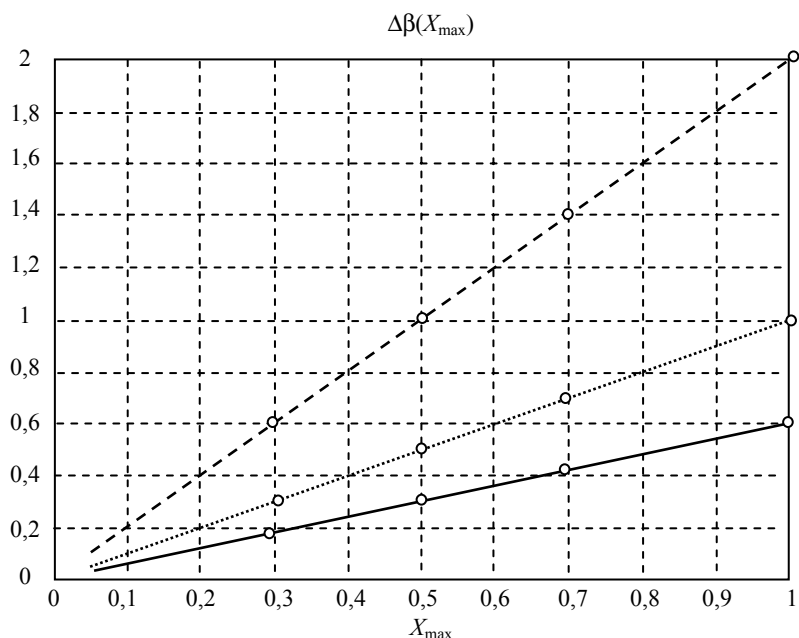


Рис. 5.1. Залежність відхилень  $\Delta\beta_i$  від  $x_{\max}$  :  
 ----  $\Delta\beta_1$ ; .....  $\Delta\beta_2$ ; —  $\Delta\beta_3$

Однак, як видно з рис. 5.1 лінійні регресійні залежності зсувів  $\Delta\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) від  $x_{\max}(l)$ , ( $l = 1, 2, 3, 4$ ), збігаються для нульової амплітуди  $x_{\max}$  до нуля; відповідно оцінки  $\hat{\beta}_j$  збігаються до істинних значень  $\beta_j = 1$ .



Якщо бралася повна модель (5.7), то з регуляризацією за Тихоновим МНК-оцінювання коефіцієнтів повної моделі (5.7) дало практично нульове значення показника  $\epsilon^T \epsilon$ . Регуляризований показник за Тихоновим:

$$I(\hat{\beta}, \alpha) = \|\Delta Y(y) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\| + \alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|, \quad (5.9)$$

де  $\alpha$  — параметр регуляризації;  $\beta_{apr}$  — апіорі заданий вектор параметрів.

Практично нульове значення показника  $\epsilon^T \epsilon$  досягається для самих різних значень  $\beta_{apr}$ , але оцінка  $\hat{\beta}$  близька до  $\beta_{apr}$ , а не до дійсної, яка дорівнює одиниці. Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, де модель і об'єкт ізоморфні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k), \quad (5.10)$$

Тут  $x_1(k)$  і  $x_2(k)$  сильно корельовані. Тому функціонал  $\epsilon^T \epsilon$  (пунктирні лінії на рис. 5.2) як функція  $\hat{\beta}$ , сильно випуклий для першого і третього квадранта площини  $(\beta_1, \beta_2)$  і слабо-випуклий («рівчак») для другого і четвертого квадрантів.

Регуляризуючий десятивідсотковий додатак  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$ , ( $\alpha = 0,1$ ) функціонала (5.9) (круги на рис. 5.2) строго випуклий і, відповідно, робить випуклим функціонал (5.9).

Стрілками показано процес мінімізації функціонала (5.9), в результаті якого з апіорної оцінки  $\beta_{apr}$  отримана апостеріорна оцінка  $\hat{\beta}$  (табл. 5.1). Як впливає з табл. 5.1 і рис. 5.2, оцінки  $\hat{\beta}$  прямують в область близьку до дійсного значення, якщо  $\beta_{apr}$  лежить в першому і третьому квадранті (ближче або далі від  $\beta$  залежно від віддалення  $\beta_{apr}$  від  $\beta$ ). Якщо ж  $\beta_{apr}$  лежить в другому і четвертому квадрантах, оцінки, в результаті мінімізації регуляризованого функціонала (5.9), не відходять далеко від апіорних, знаходячи точку компромісу між зростаючою добавкою  $\alpha \|\hat{\beta} - \beta_{apr}\|$  і спадним значенням норми  $\|\Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(\hat{\beta}, t)\|$ .

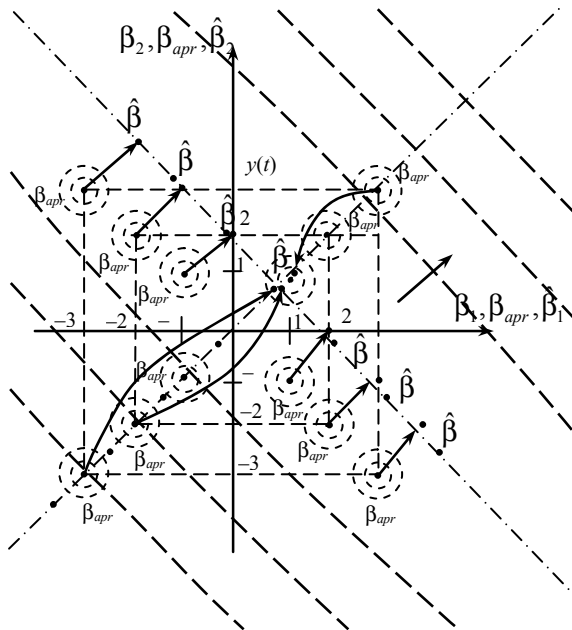


Рис. 5.2. Точне значення  $\beta$  і її оцінка  $\hat{\beta}$ , отримана зумови мінімуму функціонала (5.9) для різних апіорних значень  $\beta_{apr}$

Таблиця 5.1

Апіорні і апостеріорні значення параметрів

$\beta_{apr1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{apr2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
1	1	1	1	0
-1	0,904	-1	0,904	0,0091
-2	0,857	-2	0,857	0,0091
-3	0,809	-3	0,809	0,036
2	1,048	2	1,048	0,0023
3	1,095	3	1,095	0,0091
1	1,9	-1	0,0015	0,0045

$\beta_{apr1}$	$\hat{\beta}_1$	$\beta_{apr2}$	$\hat{\beta}_2$	$\frac{\ \Delta Y(t) - \Delta \hat{Y}(t)\ }{\ \Delta Y(t)\ }$
2	2,85	-2	-0,95	0,011
3	3,8	-3	-1,9	0,0226
-1	0,0015	1	1,9	0,0045
-2	-0,95	2	2,85	0,011
-3	-1,9	3	3,8	0,0226

При цьому відношення  $\epsilon^T \epsilon$  до  $\|\Delta Y(t)\|$  не перевищує 2,26 %. Тобто якість сигнальної ідентифікації достатньо висока, тоді як параметрична ідентифікація взагалі не коректна: у другому квадранті  $\hat{\beta}_2$  навіть йде від  $\beta_{apr2}$  в протилежний від  $\hat{\beta}_2$  бік, аналогічно  $\hat{\beta}_1$  в четвертому квадранті. У загальному випадку, для  $n$  змінних, функція  $J(\beta)$  може мати декілька «рівчаків» мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання параметричної ідентифікації.

### 5.1.3. Реальний приклад

На рис. 5.3 наведено сім режимів зміни напруги  $I_{\text{я}}$  (0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.07, 0.09, 0.1) якоря двигуна постійного струму (ДПС) і кутової швидкості  $\Omega(t)$ .

Повна динамічна модель залежності  $\Omega(t)$  від  $I_{\text{я}}(t)$  нелінійна. У кожному з семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближеності моделі, оцінки коефіцієнтів  $\hat{\beta}_j, j=1,2,3$ . лінеаризованого диференційного рівняння.

За ними розраховувався статичний коефіцієнт  $K$  зв'язку  $I_{\text{я}}$  з  $\Omega$ . Далі коефіцієнт  $K$  апроксимувався поліномом другої степені залежністю у функції норми  $\|U_{\text{я}}\|$  (рис. 5.4):

$$K(\|I_{\text{я}}\|) = 621 - 3,11\|I_{\text{я}}\|. \quad (5.11)$$

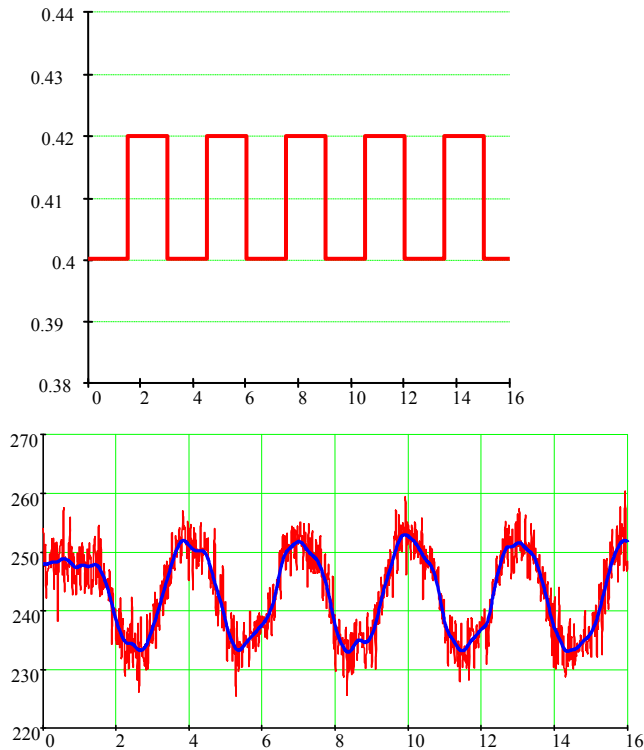


Рис. 5.3. Осцилограми режимів зміни напруги  $I_{\text{я}}$  і кутової швидкості  $\Omega$

Прогнозне в  $\|I_{\text{я}}\|=0$  значення  $K(0)$  лежить в області дійсних значень незміщеної оцінки  $K = 619,5$  отриманої шляхом апроксимації поліномом другої степені залежності (5.11) і розрахунку її значення в точці нульових відхилень.

Просте усереднювання результатів дасть істотно зміщену (знижену) оцінку  $K = 603$ .

Таким чином, для коректності постановки задачі ідентифікації слід розрізняти **сигнальний** і **параметричний** підходи.

Спільність їх полягає в мінімізації  $\epsilon^T \epsilon$ , відмінність — в моделях (абстрактна і «фізично» адекватна) і вимогам до функціонала  $\epsilon^T \epsilon$ , як функції оцінки  $\hat{\beta}$  (відповідно нестрога і строга випуклість).

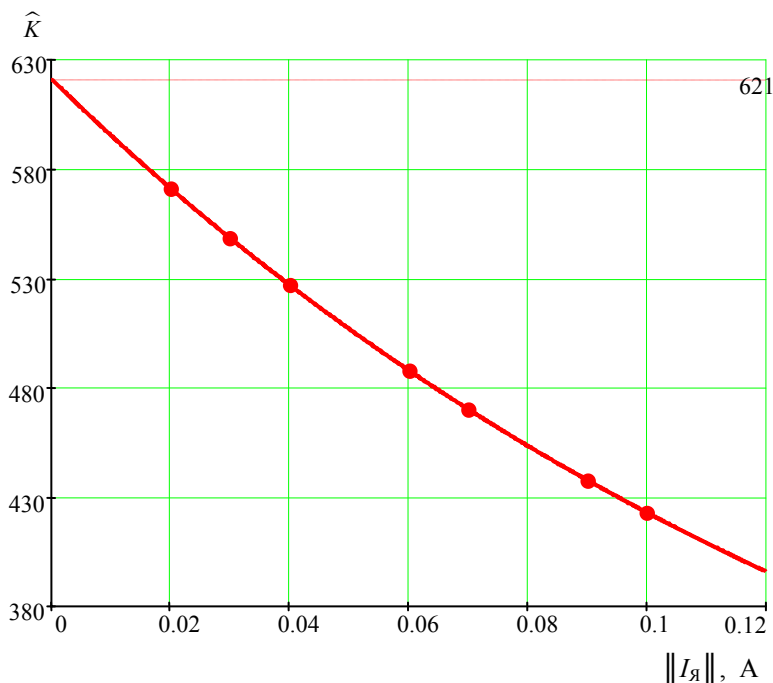


Рис. 5.4. Залежність  $\hat{K}$  від  $\|U_y\|$  та її апроксимація

На жаль, в практиці іноді користуються для оцінювання параметрів **сигнальною** ідентифікацією, закладаючи в модель апіорі необ'єктивні неточні значення коефіцієнтів, і отримуючи в результаті оптимізації функціонала (5.9) неправильні необ'єктивні оцінки  $\hat{\beta}$ .

## 5.2. Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних моделей ЕТО

Відсутність інформації про структуру нелінійної багатовимірної залежності  $y(x_1, \dots, x_n)$  не дає можливості застосувати методу оптимального планування експерименту.

Як правило, знімаються часткові перерізи  $y(x_i)$  за постійних  $x_j$  ( $j = \overline{1, n-1}, j \neq i$ ).

Скориставшись властивістю гладкості  $y(x)$ , подамо цю залежність кратним рядом Тейлора або його степеневим еквівалентом:

$$y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \dots \quad (5.12)$$

Для часткового  $k$ -го перерізу для  $x_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $i \neq k$ , з (5.12) отримаємо одновимірну залежність

$$y(x_k) = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_k + \beta_{2k} x_k^2 + \dots \quad (5.13)$$

Структура залежності (5.13) і параметри  $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots$  знаходиться за МНК для різних, але фіксованих значень інших змінних. Далі коефіцієнти часткових моделей послідовно апроксимуються як функції цих змінних [5, 12, 13].

### **5.2.1. Приклад. Нелінійна модель тягового зусилля двигуна AI-20M**

Розглянемо висотно-швидкісні характеристики двигуна AI-20M (залежність тяги  $y$  від висоти  $x_1$ , швидкості  $x_2$  та керуючого впливу  $x_3$  (рис. 5.5).

Математична модель (неперервні лінії) отримана з локальних моделей перерізів  $y(x_k)$  при  $x_1 = c_i, x_2 = c_j$ :

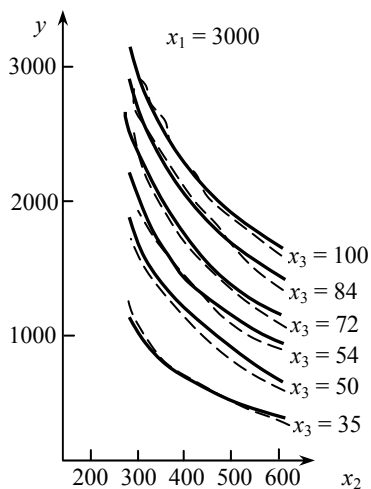
$$y(x_3) = \beta_0'' + \beta_1'' x_3 \quad (5.14)$$

шляхом МНК-апроксимації її коефіцієнтів лінійною моделлю по  $x_2$ :

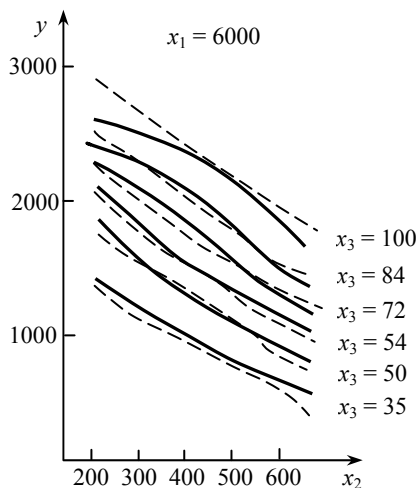
$$\beta_0'' = \beta_{01}' x_2 + \beta_{02}', \quad \beta_1'' = \beta_{11}' x_2 + \beta_{12}'. \quad (5.15)$$

і подальшої апроксимації статистично значущих коефіцієнтів моделей (5.15) квадратичною моделлю по  $x_1$ :

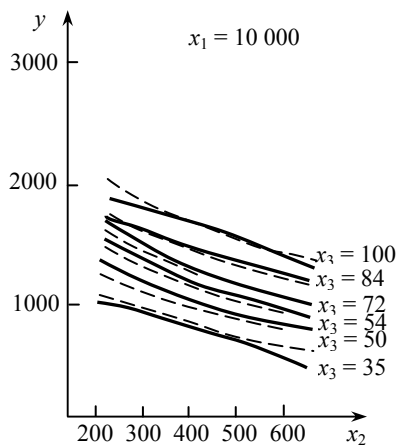
$$\beta_i' = \beta_{i0} + \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_1^2, \quad i = 0, 1. \quad (5.16)$$



*a*



*б*



*в*

Рис. 5.5. Характеристики тягового зусилля двигуна

АІ-20М (неперервні лінії — модель;

пунктирні — експериментальні дані):

*a* —  $x_1 = 3000$  м; *б* —  $x_1 = 6000$  м; *в* —  $x_1 = 10\,000$  м

Максимальна похибка апроксимації склала 2 % від  $y_{\max}$ .

У результаті, повна модель набула вигляду:

$$y = (\beta_0 + \beta_{01}x_1 + \beta_{02}x_1^2) + (\beta_1 + \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_1^2)x_2 + (\beta_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_1^2)x_3 + (\beta_3 + \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_1^2)x_2x_3 + (\beta_4 + \beta_{41}x_1 + \beta_{42}x_1^2)x_2^2. \quad (5.17)$$

### Приклад

Практично збіглися (рис. 5.6) експериментальні дані з об'єкта з моделлю залежної змінної  $y$  у функції від  $x_1$  і  $x_2$ . Тут з локальних моделей

$$y(x_2) = \beta'_{i1}x_2 + \beta'_{i2}x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, i = \overline{1, 6}, \quad (5.18)$$

лінійною по  $x_1$  апроксимацією коефіцієнтів моделі (5.18)

$$\beta''_{i1}(x_1) = \beta_1 + \beta_2x_1; \quad \beta''_{i2}(x_1) = \beta_3 + \beta_4x_1 \quad (5.19)$$

отримана повна модель

$$y = \beta_1x_2 + \beta_2x_1x_2 + \beta_3x_2^2 + \beta_4x_1x_2^2. \quad (5.20)$$

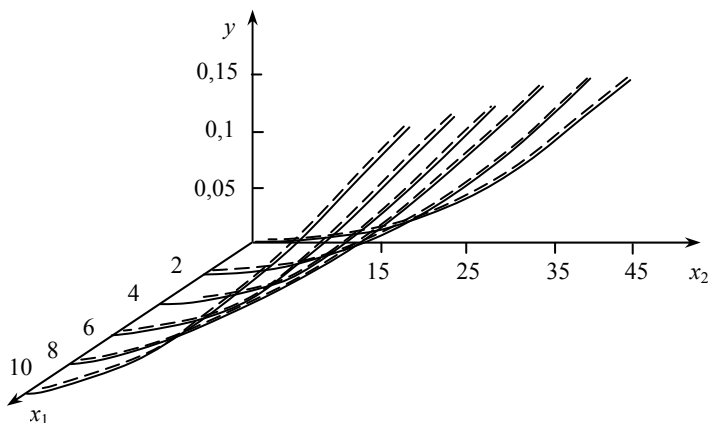


Рис. 5.6. Залежність  $Y(x_1, x_2)$

### Приклад

Залежність  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  (рис. 5.7), отримано аналогічним шляхом:



$$J(\beta_1) = \alpha_{1ik}\beta_1 + \alpha_{2ik}\beta_1^2, \quad i=1,2,3; \quad k=1,2,3; \quad (5.21)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk}\beta_2 + \alpha''_{jk}\beta_2^2, \quad j=1,2; \quad (5.22)$$

$$\alpha_{jk}^{(I)}(\beta_3) = \alpha'_j\beta_3 + \alpha''_j\beta_3^2. \quad (5.23)$$

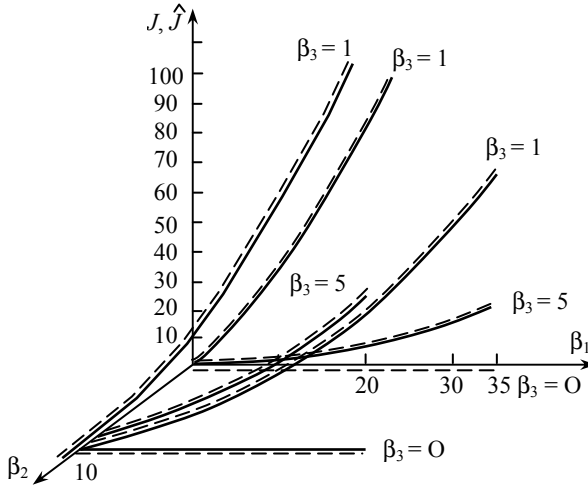


Рис. 5.7. Залежність  $J(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — (---)

та її модель  $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — (—).

Після підстановки коефіцієнтів (5.23) в (5.22), а (5.22) в (5.21) отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\beta) = & -0.96 \cdot 10^{-6} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - 0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + \\ & + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2^2 \beta_3^2 - 0.24 \cdot 10^{-4} \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 + \\ & + 0.46 \cdot 10^{-5} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 1.02 \beta_2 \beta_3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Похибка апроксимації не перевищує 0,5 % від максимального значення  $J$ .

У разі, якщо допустима похибка складає 5 % вираз (5.24) суттєво спрощується:

$$\begin{aligned}\hat{J}(\beta) = & -0.61 \cdot 10^{-2} \beta_1 \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.9 \cdot 10^{-2} \beta_2^2 \beta_3^2 + 0.23 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3^2 + \\ & + 0.04 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 - 1.72 \beta_2 \beta_3^2 - 0.0232 \beta_2^2 \beta_3 - 0.0126 \beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \\ & + 0.133 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + 1.02 \beta_2 \beta_3.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Як бачимо з прикладів, даний алгоритм дає можливість до-  
дати просто визначити структуру і параметри складних багатови-  
мірних нелінійних залежностей між вхідними і вихідною змінними  
реальних об'єктів (у тому числі і ЕТО), поданих таблично за ре-  
зультатами натурних експериментів.

### Приклад

Визначення аналітичної залежності енергії першої півхвилі  
струму розряду конденсатора  $C$  в колі з індуктивністю  $L$  і опором  $R$   
залежно від добротності  $\beta$  контуру силового перетворювача енергії.

Струм  $x$  з  $R, L, C$  — параметрами кола пов'язаний рівняннями:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x = 0, \quad \int_{-\infty}^0 x(t) dt = C U_C(0), \quad \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (5.26)$$

де  $U_C(0)$  — початкові умови по напрузі  $U_C$  на конденсаторі,  
 $x(0) = 0$ . Показник якості, що підлягає оптимізації:

$$J(\beta) = \left( \frac{C U_C^2(0)}{2} \right)^{-1} \int_0^{t_1} R x^2(t) dt, \quad t_1 = \underset{t \in (0, \infty)}{\text{ArgSupr}} x^2(t). \quad (5.27)$$

Задачу (5.26), (5.27) вирішено чисельним методом. Отримано  
залежність  $J(\beta)$ , де  $\beta$  — скаляр, і апроксимовано дробово-  
раціональною функцією від  $\beta$  (рис. 5.8).

$$\hat{J}(\beta) = \frac{-0.031 + 1.066\beta - 0.658\beta^2 + 0.149\beta^3}{1 + 0.23\beta - 8.87 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 1.112 \cdot 10^{-5}\beta^3}. \quad (5.28)$$

Звідси оцінка  $\hat{\beta}^*$  оптимального значення  $\beta^*$  знаходиться за  
умови

$$\frac{\partial \hat{J}(\beta)}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \hat{J}(\beta)}{\partial \beta^2} < 0.$$

Максимальна похибка  $\frac{\beta^* - \hat{\beta}^*}{\beta^*} \cdot 100\%$  склала 0,05 % від  $\beta^*$ .

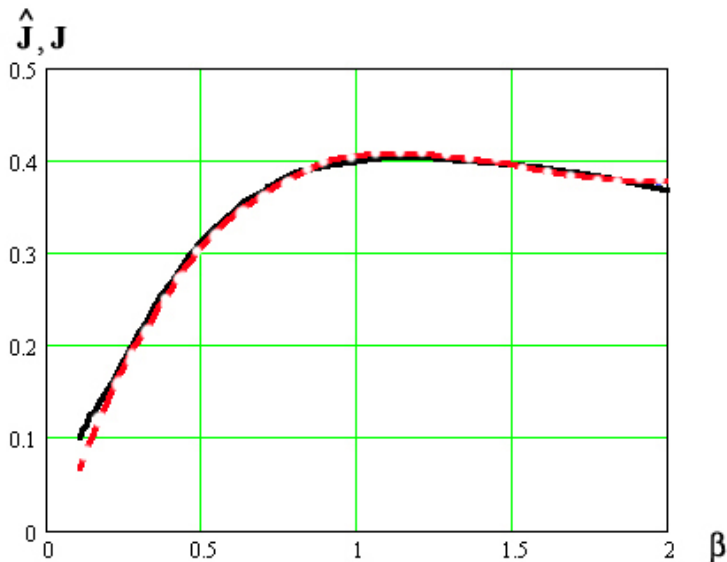


Рис. 5.8. Залежність  $J(\beta)$  (пунктир) та її модель (5.28)  $\hat{J}(\beta)$  (лінії).

### 5.3. Метод роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі ЕТО

Модель Гомерштейна (рис. 5.9) описує по входу ( $x_{\text{вх}}$ ) — виходу ( $x_{\text{вих}}$ ) реальну систему комбінацією лінійного динамічного оператора

$$\beta'_n \frac{d^n x_{\text{вих}}}{dt^n} + \beta'_1 \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}}(t) = \gamma_m \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + \gamma_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + \gamma_0 x_{\text{вх}}(t) \quad (5.29)$$

з статичним нелінійним  $f(u)$ , де зазвичай останній розкладається з коефіцієнтами  $l_k$  по системі лінійно-незалежних (бажано ортогональних) функцій  $\phi_k(u)$ :

$$f(u) = \sum_{k=1}^r l_k \phi_k(u). \quad (5.30)$$

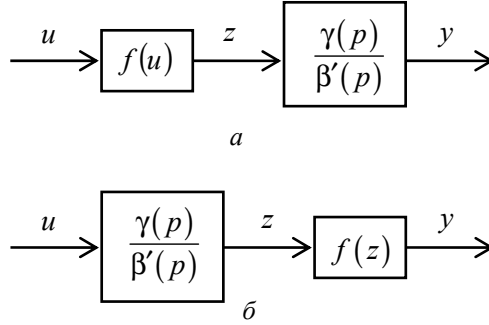


Рис. 5.9. Моделі Гомерштейна:  
 $a$  — нелінійність на вході,  $б$  — на виході

Залежно від розташування нелінійності (рис. 5.9), позначивши оператор  $\frac{d^i}{dt^i} = p^i$  і підставивши розклад (5.30) і динаміку (5.29) у відповідні структури (рис. 5.9), отримаємо для варіантів ( $a$ ), де нелінійності на вході, модель:

$$\beta'(p)y(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i p^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(u) \right). \quad (5.31)$$

Для варіанта ( $б$ ), де нелінійність на виході, модель

$$\sum_{i=0}^n \beta'_i p^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \varphi_k(y(t)) \right) = \gamma(p)u(t), \quad (5.32)$$

де  $\beta'(p) = \beta'_n p^n + \dots + \beta'_i p + 1$ ,  $\gamma(p) = \gamma_m p^m + \dots + \gamma_i p + \gamma_0$ .

За такого підходу в задачі ідентифікації визначається  $n + m + r + 2$  параметрів  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ . При цьому в моделі (5.31) параметри  $\gamma_i, \alpha_k$  входять як множина їх добутків, в моделі (5.32) та ж ситуація для параметрів  $\beta_i, \alpha_k$ . Це суттєво ускладнює розв'язок задачі оцінювання. Окрім того, якщо  $u(t)$  навіть таке, що забезпечує ортогональність  $\varphi_k(u(t))$  (що досить складно реалізувати), тим не менш ортогональність порушується внаслідок диференціювання функцій  $\varphi_k(u(t))$  у часі.

Наприклад, якщо  $\phi_k$  — це синус-косинусний ряд, то вже перша похідна від  $\phi_k$  буде лінійно залежною функцією від  $\phi_{k+1}$ . Використання степеневого поліному

$$f(u(t)) = \sum_{k=0}^r \alpha_k u^k(t), \quad (5.33)$$

теж не створює ортогональності. Все це погіршує практичне використання моделей (5.31), (5.32), особливо в реальних умовах зашумленості сигналів, які підлягають диференціюванню. Тому, враховуючи обмеженість полоси спектру сигналів  $x_{\text{вх}}(t)$ ,  $x_{\text{вих}}(t)$  і допускаючи кінцеву похибку  $\Delta$  апроксимації диференційного рівняння (5.29) рівнянням пониженого порядку

$$\beta_n \frac{d^n x_{\text{вих}}}{dt^n} + \dots + \beta_1 \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t) + \Delta(t), \quad (5.34)$$

отримаємо спрощені моделі Гомерштейна

$$\beta(p)y(t) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \phi^k(u), \quad (5.35)$$

$$\sum_{i=0}^n \beta_i P^i \left( \sum_{k=0}^r \alpha_k \phi_k(y(t)) \right) = u(t). \quad (5.36)$$

Останню можна представити у вигляді (5.35), якщо розглядати не пряму  $y(u)$ , а інверсну залежність  $u(y)$  (рис. 5.10).

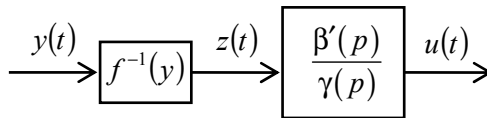


Рис. 5.10. Інверсна модель

Таким чином задача ідентифікації обох моделей зводиться до задачі ідентифікації моделі (5.35) з  $n+r+1$  невідомими. Подальше спрощення задачі досягається шляхом урахування фундаментальної закономірності всіх відображень, а саме **гладкості** залежності  $f(u)$  [4, 7, 12, 13].

### **5.3.1. Критерії наближення, що враховують гладкість шуканої залежності**

Поданий в 1806–1809 роках Лежандром–Гаусом середньо-квадратичний критерій близькості дає можливість отримати найкраще наближення до математичного очікування шуканої залежності, якщо завади розподілені за нормальним законом, а вибірка даних достатньо велика.

Для обмежених вибірок і порушення нормальності закону розподілу завод, метод втрачає свою оптимальність. Покращити ситуацію можна, якщо врахувати додаткову інформацію, а саме відкинути аномальні дані і враховувати природну гладкість шуканих залежностей.

Аномальні дані відкидаються чи виправляються на етапі робастної фільтрації сигналів, а властивість гладкості вперше була врахована при визначенні моделей технологічних процесів у праці [4]. Замість мінімуму середнього квадрата похибки запропоновано мінімізувати в загальному випадку середнє значення квадрата  $r + 1$ -ї кінцевої різниці  $\Delta^{r+1}\epsilon$ :

$$I = \sum (\Delta^{r+1}\epsilon)^2 \rightarrow \min, \quad (5.37)$$

де, якщо  $r = 1$ , то має місце наближення за гладкістю, якщо  $r = 2$  — наближення по кривизні і так далі.

У праці [4] також пропонується узагальнення критерію (5.37), де замість квадрата беруть будь-яку степінь. Але, ураховуючи вимогу робастності, збільшувати ступінь недоцільно.

Порядок різниці  $r + 1$  встановлюється апіорі, якщо відомий порядок моделі (5.30), або відшукується поступово, починаючи з  $r = 1$ .

### **5.3.2. Визначення гладкої статичної нелінійності з динаміки ЕТО**

Динаміка ЕТО описується лінійним диференціальним рівнянням

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{d^{n-k} y(t)}{dt^{n-k}} = f[x(t)], \quad (5.38)$$

де  $f[x(t)]$  — статична нелінійність, на вхід якої поступає тестуючий сигнал  $x(t)$ , а вихід цієї нелінійності впливає на динаміку об'єкта, моделлю якого слугує передатна функція  $W(a, p)$  [7, 1, 11, 13].

Задача полягає у тому, щоб за вимірюваними зашумленими значеннями виходу  $\hat{y}(t_k)$  відновити (оцінити) статичну нелінійність. Класичні способи вирішення задач такого типу полягають у застосуванні для оцінювання параметрів моделі динаміки об'єкта (параметрів передаточної функції) методу найменших квадратів (МНК). При цьому, як правило, невідома нелінійність як функція вхідного впливу  $f[x(t)]$  апроксимується поліномом

$$f[(x)] = b_0 + b_1 x(t) + b_2 x^2(t) + \dots + b_m x^m(t). \quad (5.39)$$

Формується нев'язка

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - f[x(t)] \quad (5.40)$$

й мінімізується по  $b_i, a_k (i = 0, 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n)$  функціонал

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt. \quad (5.41)$$

Параметри  $b_k, k = \overline{1, m}; a_k, k = \overline{1, n}$ , оцінюються за умови мінімуму функціоналу (5.41):

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0. \quad (5.42)$$

Практика застосування методу найменших квадратів до вирішення такого роду задач свідчить, що йому властиві досить суттєві недоліки, які пов'язані з високими вимогами, що пред'являються до тестуючого (вхідного) сигналу  $x(t)$ , а також низька точність оцінок параметрів нелінійної динамічної моделі внаслідок неадекватності структури моделі об'єкта, які обмежують застосування класичного МНК для вирішення задач такого типу.

Спроби підвищення адекватності моделі за рахунок підвищення її порядку призводить до різкого збільшення часу оцінювання, що як правило, є неприпустимим в умовах обмеженого часу (особливо при вирішенні задачі у реальному часі) та зашумленості вихідних даних, що вимірюються.

Це призводить до появи систематичних похибок, які суттєво обмежують застосування класичного МНК. У зв'язку з цим задача пошуку методів оцінювання статичних нелінійностей, які впливають на динаміку об'єкта, а також оцінювання параметрів моделі передаточної функції об'єкта контролю, є важливою й актуальною. З метою визначення непараметричної моделі  $\hat{f}[x(t)]$  статичної нелінійності  $f[x(t)]$  визначимо скомпенсований вихід об'єкта у такому вигляді:

$$y_{\text{ск}}(t) = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2\hat{y}(t)}{dt^2}, \quad (5.43)$$

де параметри  $\beta_1, \beta_2$  визначаються за умови середнього квадрату  $r$ -ї похідної від  $\hat{y}(t)$  по  $x$ :

$$(\beta_1, \beta_2) = \arg \min \sum_{k=1}^N \left( \frac{d^r y_{\text{ск}}(t_k)}{dx^r} \right)^2. \quad (5.44)$$

Приймаючи до уваги дискретність у часі вимірювань вихідної величини  $y$ , замість  $r$ -ї похідної можна використовувати відповідний їй дискретний аналог. Для цього послідовність  $x(t_k)$ , яка вимірюється із сталим кроком у часі  $\Delta t$  перетворюється у послідовність із сталим прирощенням  $\Delta x$ , але із змінним кроком у часі. Ця задача можна вирішується наступним чином.

Перш за все треба виконати згладжування зашумлених вхідної та вихідної послідовностей вимірювань. Для вирішення цієї задачі використовується згладжування значень, що вимірюються, за допомогою сплайнів.

Впорядковуємо значення вхідної змінної  $x(t_k)$  за зростанням. Далі, для визначення значень  $t_j$ , які відповідають значенням вхідної змінної, що змінюються зі сталим кроком, виконаємо інтерполювання одержаної послідовності за допомогою інтерполяційних сплайнів:

$$S_2(t) = x_k + m_k(t - t_k) + c_k(t - t_k)^2, \quad t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]. \quad (5.45)$$

Значення  $t_j$ , які відповідають  $j\Delta x$ , знаходимо шляхом розв'язання рівняння сплайну:



$$t_{j_k} = t_k + \frac{1}{2c_k} \left( -m_k + \sqrt{m_k^2 + 4j c_k \Delta x} \right), \quad (5.46)$$

де  $j = \overline{1, l_k}$ ,  $l_k = [x(t_{k+1}) - x(t_k)] / \Delta x$ .

Після визначення всіх  $t_{j_k}$  обчислюються значення  $\hat{y}(t_{j_k}), d\hat{y}(t_{j_k})/dt$  тощо.

Оскільки замість похідних по  $x$  використовуються скінчені різниці, маємо:

$$\Delta^r y_{ck} = \Delta^r \left[ \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2 \hat{y}(t)}{dt^2} \right]. \quad (5.47)$$

Зокрема, для  $r = 2$  маємо:

$$\Delta^2 y_{ck} = [y_{ck}(t_{k+2}) - 2y_{ck}(t_{k+1}) + y_{ck}(t_k)] / (\Delta x)^2, \quad (5.48)$$

для  $r = 3$ :

$$\Delta^3 y_{ck} = [y_{ck}(t_{k+3}) - 3y_{ck}(t_{k+2}) + 3y_{ck}(t_{k+1}) - y_{ck}(t_k)] / (\Delta x)^3. \quad (5.49)$$

Мінімізація функціоналу гладкості полягає у розв'язанні відносно  $\beta_1, \beta_2$  системи нормальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} &= 0; \\ \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N [\Delta^r \hat{y}(t_k) - \Delta^r \frac{d\hat{y}(t_k)}{dt} \beta_1 - \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} \beta_2] \Delta^r \frac{d^2 \hat{y}(t_k)}{dt^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Після визначення параметрів  $\beta_1, \beta_2$  непараметричне значення гладкої статичної нелінійності визначається за формулою

$$f[x(t)] = \hat{y}(t) - \beta_1 \frac{d\hat{y}(t)}{dt} - \beta_2 \frac{d^2 \hat{y}(t)}{dt^2}. \quad (5.51)$$

### Алгоритм згладжування експериментальних даних

Нехай унаслідок спостережень для значень аргументу  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  одержано значення функції  $f(\mathbf{x})$  у вигляді таблиці. З метою зменшення випадкових похибок та одержання більш плавної функції застосовується процес згладжування, сутність якого полягає у тому, щоб значення, які одержано за результатами

спостережень, замінити значеннями, які одержано внаслідок процедури згладжування.

Задача згладжування формулюється наступним чином. Треба знайти функцію  $f^*(\mathbf{x}) \in L_2[a, b]$  таку, щоб досягався мінімум функціоналу

$$J[f] = \sum_{i=0}^n p_i [y_i - f(x_i)]^2 + p \int_{\alpha}^{\beta} [f^{(n)}(t)] dt, \quad (5.52)$$

де  $p > 0$  — допоміжний параметр,  $p_i$  — задані числа (вагові коефіцієнти).

При  $p = 0$  задача зводиться до задачі наближення за МНК.

При усіх  $p_i = 0$  задача переходить у задачу інтерполяції.

Згладжувальний сплайн відшукується у вигляді

$$S_3(x) = \alpha + \beta x + \sum_{i=0}^3 c_k^{[i]} x^i, \quad x_k < x < x_{k+1}. \quad (5.53)$$

Для побудови сплайну, що згладжує, для визначеності системи рівнянь треба накласти додаткові умови у місцях «зшивання» сплайнів.

Ці додаткові умови зазвичай називаються межовими умовами. Вони залежать від характеру даних, що вимірюються, а також від того, які умови мають бути виконаними у точках «зшивання». При згладжуванні розрізняють: умови періодичності, а також умови на перші або другі похідні у цих точках [1].

У неперіодичному випадку для визначення коефіцієнтів сплайну, що згладжує, маємо систему:

$$\begin{aligned} a_0 M_0 + b_0 M_1 + c_0 M_2 &= g_0; \\ b_0 M_0 + a_1 M_1 + b_1 M_2 + c_1 M_3 &= g_1; \\ c_{k-2} M_{k-2} + b_{k-1} M_{k-1} + a_k M_k + b_k M_{k+1} + c_k M_{k+2} &= g_k; \quad k = \overline{2, N-2}; \\ c_{N-2} M_{N-3} + b_{N-2} M_{N-2} + a_{N-1} M_{N-1} + b_{N-1} M_N &= g_{N-1}; \\ c_{N-1} M_{N-2} + b_{N-1} M_{N-1} + a_N M_N &= g_N. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Коефіцієнти цієї системи визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}(b_{k-1} + h_k) + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_{k-1} + \left( \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_k^2} p_{k-1}; k = \overline{1, N-2}; \\
b_k &= \frac{h_k}{6} - \frac{1}{h_k} \left[ \left( \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{h_{k-1}^2} p_k + \left( \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_k} \right) p_{k+1} \right]; k = \overline{1, N-2} \\
c_k &= \frac{1}{h_k h_{k+1}} p_{k-1}; k = \overline{1, N-3}; \\
g_k &= \frac{z_{k+1}^0 - z_k^0}{h_k} - \frac{z_k^0 - z_{k-1}^0}{h_{k-1}}; k = \overline{1, N-1}.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Згладжувальний сплайн задовольняє межові умови:

$$S''(a) = S''(b) = 0, \text{ то}$$

$$a_0 = a_N = 1; \quad b_0 = c_0 = b_{N-1} = c_{N-1} = g_N = g_0 = 0.$$

Системи рівнянь, які наведено вище, розв'язують методом немонотонної прогонки. Після визначення параметрів  $M_k$  величини  $z_k$  визначаються за співвідношеннями

$$z_k - z_k^0 = -p_k D_k; k = \overline{0, N}, \tag{5.56}$$

де

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{1}{h_0} (M_1 - M_0); \\
D_k &= \frac{1}{h_k} (M_{k-1} - M_k) - \frac{1}{h_{k-1}} (M_k - M_{k-1}); k = \overline{1, N-1}; \\
D_N &= \frac{1}{h_{N-1}} (M_N - M_{N-1}).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Найважливішим моментом під час побудови згладжувального сплайну, є визначення вагових параметрів  $p_k$ .

У практичних застосуваннях зазвичай відомі похибки визначення величин  $z_k^0$ , тобто відомі  $|z_k - \bar{z}_k| \leq \delta_k$ , де  $\bar{z}_k$  — точні значення вимірюваної величини.

У цій ситуації природно вимагати, щоб згладжувальний сплайн  $S(x)$  задовольняв умови

$$|z_k - z_k^0| \leq \delta_k; k = \overline{0, N} \quad (5.58)$$

або, що теж саме, умовам  $p_k | D_k | \leq \delta_k; k = \overline{1, N}$ .

Ці обмеження використовуються для обчислення вагових множників  $p_k$ .

Побудуємо ітераційний процес, реалізація якого дозволить одержати невідомі коефіцієнти  $M_k$  та множники  $p_k$ :

$$(A + 6HR^{(m)}H^T)M^{(m)} = 6Hz^0. \quad (5.59)$$

$$p_k^{(m+1)} = \begin{cases} \delta / |D_k^{(m+1)}| & \text{якщо } D^{(m+1)} \neq 0, \\ 0 & \text{якщо } D^{(m+1)} = 0. \end{cases} \quad (5.60)$$

де  $m$  — номер ітерації.

Матриці  $A, H$  мають такий вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & \dots & . & . \\ 0 & r_1 & h_1 & . & \dots & . & . \\ . & h_1 & r_2 & . & \dots & . & . \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ . & . & . & h_{N-3} & r_{N-2} & h_{N-2} & . \\ . & . & . & . & h_{N-2} & r_{N-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

де  $r_k = 1(h_{k-1} + h_k)$ ;

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0^{-1} & -(h_0^{-1} + h_1^{-1}) & h_1^{-1} & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ . & h_{N-1}^{-1} & -(h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1}) & \dots & h_{N-1}^{-1} \\ . & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} p_0 & & \\ & \ddots & \\ & & p_N \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Зв'язок  $M_k$  з  $z_k$  визначається матричним рівнянням

$$AM = 6Hz. \quad (5.63)$$

Як початкове наближення природно взяти  $p_0^0 = 0$ , що відповідає інтерполяційному сплайну із значеннями  $D_k = D^{(0)}$ . Ітераційний процес продовжується доти, доки значення сплайну  $z_k$  не опиняться у «коридорі».

### Алгоритм інтерполяції параболічними сплайнами

Нехай  $f(x) \in C_{[a,b]}$ ,  $\{a, b\} \in R_n$ ;  $a < b$ , і задано дві множини вузлів  $\Delta_n, \Delta'_n$ :

$$\Delta'_n : \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{n+1} = b. \quad (5.64)$$

Припустимо, що  $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Функція  $S_2(x; f)$  називається інтерполяційним параболічним сплайном для функції  $f(x)$ , якщо

$$\begin{aligned} S_2(x) &\in P_2; \quad x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}); \quad i = \overline{1, n}; \\ S_2(x) &\in C_{[a,b]}^{(1)}; \\ S_2(x) &= f(x_i). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Числа  $\bar{x}_i$  називаються вузлами сплайну, а числа  $x_i$  — вузлами інтерполяції. Вузли сплайну — це точки ймовірного розриву старшої похідної (у даному випадку другої). Сплайн  $S_2(x; f)$  залежить від  $n+3$  параметрів, отже містить два вільних параметри. Тому на інтерполяційний параболічний сплайн накладаються два додаткових обмеження. У загальному випадку найбільш розповсюдженими є такі умови:

$$S_2'(a) = a_n; \quad S_2'(b) = b_n; \quad S_2''(a) = A_n; \quad S_2''(b) = B_n, \quad (5.66)$$

де  $a_n, b_n, A_n, B_n$  — задані дійсні числа.

Конкретний вибір цих чисел залежить від задачі, що вирішується. Наприклад, якщо функція  $f(x)$  має відповідні похідні, то можна покласти

$$a_n = f'(a), b_n = f'(b), A_n = f''(a); B_n = f''(b) \quad (5.67)$$

або замінити їх відповідними наближеними значеннями похідних (кінцевими різницями). Якщо вибір межових умов викликає труднощі, можна вимагати, щоб у точках  $\bar{x}_1, \bar{x}_n$  сплайн  $S_2(x)$  мав неперервну другу похідну, тобто

$$S_2''(z-0) = S_2''(z+0), \quad z = \bar{x}_i \quad (i=1; i=n). \quad (5.68)$$

Нехай  $m_i = S_2'(x_i); \quad i = \overline{0, n}; \quad M_i = S_2''(x_i)$ . Оскільки  $S_2''(x)$  — кусково-стала функція, то

$$S_2''(x) = M_i; \quad \bar{x}_i < x < \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (5.69)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i; \quad \bar{h}_i = x_{i+1} - \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}; \\ \sigma_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i)h_i = y_{i+1} - h_i y_i; \\ u_i &= h_i h_{i+1} + h_i; \quad \gamma_i = \bar{h}_i h_i - \bar{h}_i; \\ v_i &= h_{i-1} h_{i-1} + h_i; \quad \bar{u}_i = u_i \gamma_i; \quad \bar{v}_i = v_i \gamma_i; \quad i = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Тоді для  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  маємо

$$S_2(x) = y_i + m_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_{i+1})_+^2. \quad (5.71)$$

Будемо вимагати, щоб  $S_2(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$  та  $S_2'(x_{k+1}) = m_{k+1}$ ,  $k = \overline{0, n-2}$ . Тоді для коефіцієнтів  $c_k, d_k$  одержимо такі вирази:

$$c_i = \frac{m_{i-1}}{2} \left( \frac{1}{h_i} - \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) - \frac{m_i}{2} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{\bar{v}_i}{\bar{h}_i} \right) + \frac{\sigma_i}{h_i} \bar{v}_i, \quad (5.72)$$

$$d_i = \frac{\gamma_i h_i}{h_i^2} (m_i + m_{i+1} / 2 - (y_{i+1} - y_i)). \quad (5.73)$$

Оскільки у точці  $x_{i+1}$  має виконуватись рівність  $S_2'(x_{k+1}-0) = S_2'(x_{k+1}+0)$ , одержуємо рівність  $c_k + d_k = c_{k+1}$  або

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k \bar{h}_k} m_k + \left( \frac{h_k + \bar{h}_k}{h_k \bar{h}_k} + \frac{1}{h_{k+1}} + \frac{\gamma_k}{\bar{h}_{k+1}} \right) m_{k+1} + \frac{1}{h_{k+1} \gamma_{k+1}} m_{k+2} = \\ = 2 \frac{\sigma_k}{\bar{h}_k} + 2 \frac{\sigma_{k+1}}{h_{k+1} - \bar{h}_{k+1}}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Для межових умов (5.73) маємо:  $2c_0 = A_n$ ;  $2c_{n-1} + 2d_{n-1} = B_n$ .

Для межових умов (5.67):  $d_0 = d_{n-1} = 0$ ;

$$g_k = e_k = 2u_k \frac{h_{k-1}}{\bar{h}_{k-1}} \sigma_{k-1} + 2v_k \gamma_k \frac{h_k}{\bar{h}_k} \sigma_k; k = \overline{1, n-1}.$$

Для межових умов (5.66) система рівнянь має вигляд:

$$A\mathbf{m} = \mathbf{g}, \quad (5.75)$$

де  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_{n-1}]$ ;

$$\mathbf{g} = [g_1 - \bar{u}_1 a_n, g_2, g_3, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} - \bar{v}_{n-1} b_n].$$

Для межових умов (5.67) система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \left( 2 - \frac{\bar{h}_0}{h_0} \right) m_0 + \frac{\bar{h}_0}{h_0} m_1 = 2\sigma_0 - A_n (h_0 - \bar{h}_0); \\ \bar{u}_k m_{k-1} + (2 + \bar{u}_k + \bar{v}_k) m_k + \bar{v}_k m_{k+1} = g_k; k = \overline{1, n}; \\ \frac{1}{\gamma_{n-1}} m_{n-1} + \frac{h_{n-1} + \bar{h}_{n-1}}{h_{n-1}} m_n = 2\sigma_{n-1} + B_n \bar{h}_{n-1}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

### Визначення параметрів $b_k, a_i$ методом найменших квадратів

Мінімізація критерію (5.41) — визначення оцінок параметрів  $b_k, k = \overline{1, m}$  та  $b_k, i = \overline{1, n}$ , реалізується шляхом розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] x_k^l \right\} = \sum_{k=1}^N y_k x_k^l, \quad l = \overline{0, m}; \\ \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \sum_{i=1}^m b_i x_k^i - \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} \right] \frac{d^l y_k}{dt^l} \right\} = \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^T; \\
 e_l &= \sum_{k=1}^N y_k x_k^{l-1}; l = \overline{1, m}; \\
 e_l &= \sum_{k=1}^N y_k \frac{d^l y_k}{dt^l}; l = \overline{1, n} \\
 d_{1,1} &= N; \quad d_{j,l} = d_{l,j} = \sum_{k=1}^N x_k^j x_k^l, j, l = \overline{1, m}; \\
 d_{l,m+j} &= \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} x_k^{l-1}; j = \overline{1, n}; l = \overline{1, m}; \\
 d_{l+m,j} &= \sum_{k=1}^N x_k^{j-1} \frac{d^l y_k}{dt^l}; l = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; \\
 d_{l+m,j+n} &= \sum_{k=1}^N \frac{d^j y_k}{dt^j} \frac{d^l y_k}{dt^l}; l = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}.
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

Тоді система лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих параметрів  $b_k$ ,  $k = \overline{1, m}$  та  $b_k$ ,  $i = \overline{1, n}$ , набуває «класичного» для МНК вигляду

$$D\mathbf{c} = \mathbf{e}. \tag{5.79}$$

### Тестовий приклад визначення нелінійності електроприводу

Для контролю стійкості та точності системи автоматизованого електроприводу необхідно визначити величину та асиметрію зони нечутливості, крутизну та рівні насиченості нелінійної залежності швидкості обертання вихідного валу системи від напруги  $U_{\text{я}}$  на валу якоря двигуна постійного струму в режимі реверсу, тобто швидкість переходить від  $-\Omega_{\text{max}}$  до  $+\Omega_{\text{max}}$ . Динаміці цього процесу відповідає диференціальне рівняння



$$a_2 \frac{d^2 \Omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\Omega(t)}{dt} + \Omega(t) = f[U_{\text{я}}(t)], \quad (5.80)$$

де  $U_{\text{я}}$  змінюється ступінчасто в межах від  $-U_{\text{я max}}$  до  $+U_{\text{я max}}$  :

$$U_{\text{я}}(t) = U_{\text{max}} \left[ -1 + \frac{1}{q/2} \sum_{k=1}^q 1(-k\Delta t) \right],$$

де  $q=16$ ;  $1(t) = \begin{cases} 1, & t > k\Delta t, \\ 0, & t < k\Delta t. \end{cases}$

Числові значення параметрів  $a_1, a_2$  невідомі. Параметри тестуючого впливу дорівнюють  $U_{\text{max}} = 120 \text{ В}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$ . Початкові умови:  $\Omega(0) = -\Omega_{\text{max}} = -300 \text{ рад/с}$ ,  $d\Omega(0)/dt = 0$ .

Невідоме значення нелінійної залежності подано наступним виразом:

$$\Omega[U_{\text{я}}(t)] = 3[U_{\text{я}}(t)] - 60 \sin(0,065[U_{\text{я}}(t)]),$$

який відповідає умові гладкості залежності із зонами нечутливості та насичення. Вимірювання вихідного сигналу приводу здійснюються з кроком  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$  при  $N = 200$ ,  $q = 16$ .

Оскільки вимірювання вихідної змінної виконуються в умовах впливу перешкод вимірювання, для моделювання процесу накладемо 10 % похибку вимірювань у вигляді «білого шуму» — випадкового нормального процесу із нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Моделювання процесу складається з наступних кроків:

1. Згладжування вхідних  $[U_{\text{я}}(t_k)]$  та вихідних  $\hat{y}_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , значень, що вимірюються.
2. Упорядкування значень  $U_{\text{я}}(t_k)$  у порядку їхнього зростання.
3. Інтерполяція цих значень за допомогою інтерполяційних сплайнів.
4. Визначення значень  $t_{k_j}$ , що відповідають рівномірному змінюванню  $U_{\text{я}}(t_k)$  зі сталим кроком  $\Delta U$ .
5. Обчислення значень  $\hat{y}(t_{k_j})$ , а також похідних першого та другого порядку від цих значень (кінцевих різниць).

6. Мінімізація функціоналу (5.41) шляхом складання та розв'язання системи рівнянь (5.79) методом найменших квадратів.

Моделювання процесу визначення статичної нелінійності виконувалось для декількох значень  $m$  з метою визначення оптимального степеню поліноміальної залежності статичної нелінійності від вхідного впливу. З рис. 5.11 бачимо, що оптимальне значення відповідає  $m = 5$ . При цьому досягнуто значення середньоквадратичної похибки  $\varepsilon_5 = 26,72$ .

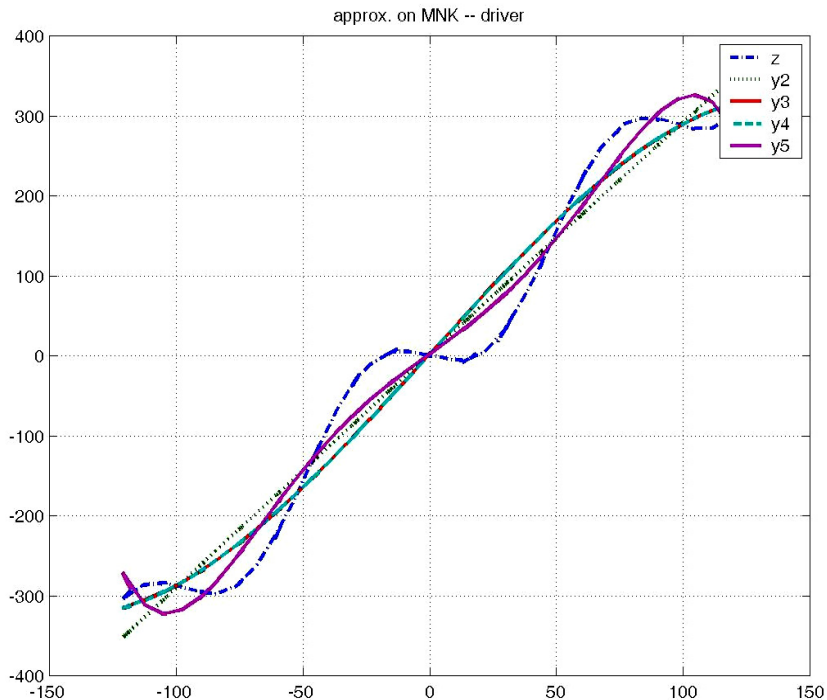


Рис. 5.11. Оцінка нелінійності для  $m = 2, 3, 4, 5$  за MNK

Цю ж задачу розв'язано за допомогою методу компенсації динаміки об'єкта контролю. Перші три кроки ті ж самі.

Після виконання кроків 4 та 5, тобто визначення часових інтервалів, що відповідають сталому припущенню значень тестуючого сигналу, та визначення значень вихідного сигналу, які відпові-

дають значенням часу  $t_{k_j}$  замість кроку 5 виконуємо: мінімізацію функціоналу по  $\beta_1, \beta_2$ :

$$\min J_{\text{ск}} = \min \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial^r \hat{y}_{\text{ск}}(t_k)}{\partial U^r(t)} \right)^2.$$

У результаті отримаємо оцінки  $\hat{\beta}_1 = 0,0196$ ,  $\hat{\beta}_2 = 0,000134$ .

Тоді непараметрична оцінка шуканої нелінійності визначається наступним чином:

$$f[U_{\text{я}}(t)] = y(t) - 0,0196 \frac{dy(t)}{dt} - 0,000134 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}.$$

Результати моделювання для  $r = 1, 2, 3$  наведено на рис. 5.12.

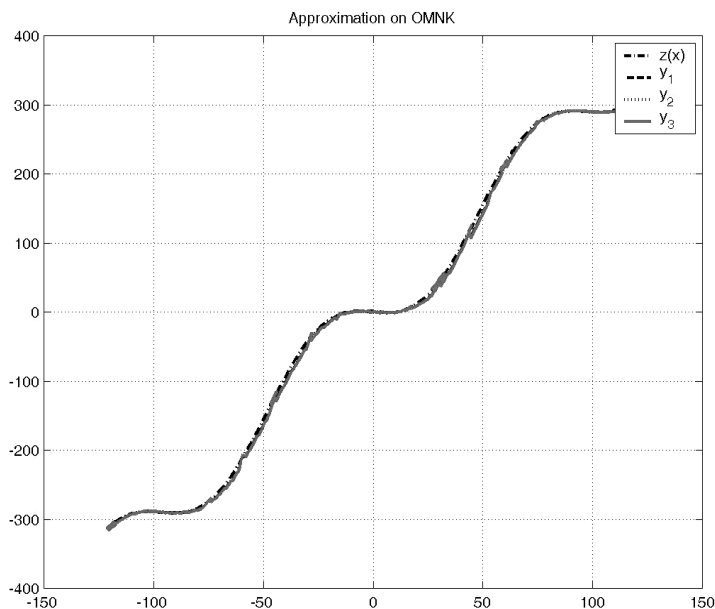


Рис. 5.12. Оцінка статичної нелінійності за методом компенсації динаміки для  $r = 1, 2$  та  $r = 3$

Остаточна похибка виявилась найменшою для  $r = 2$  і дорівнює  $\varepsilon = 3,067$ , що менше 0,5 %.

Отримавши точну залежність  $f[U_a(t)]$  (рис. 5.12), можна з рівняння (5.80) по МНК визначити більш точно коефіцієнти динамічної складової моделі.

### Приклад реальної системи

На рис. 5.13 наведено статичну ВАХ  $y(x)$ , отриману з динамічних режимів ЕТО (лінія 1), і апроксимовану прямою (лінія 2), а також для наочності наведено ламану (лінія 3), впорядковану за  $x$  залежність, побудовану без компенсації динаміки.

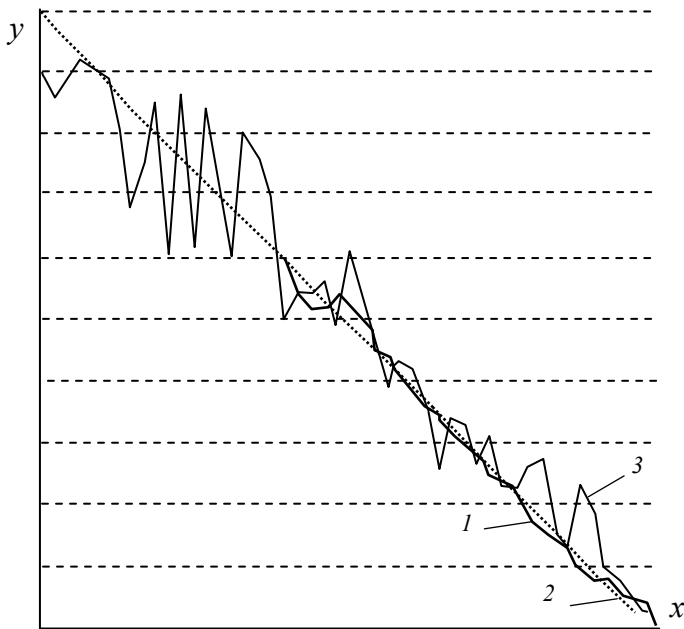


Рис. 5.13. Графік залежності  $y(x)$

Таким чином, спочатку виявивши й оцінивши нелінійність, а потім, якщо режим досить динамічний, більш точно можна оцінити і лінійну динамічну частину моделі ЕТО.

Тобто статика і динаміка оцінюються роздільно, що спрощує задачу і дає можливість більш точно, ніж з рівнянь (5.31), (5.32) по МНК визначити складові моделі Гаммерштейна.

## **5.4. Об'єднання кусково-аналітичних моделей ЕТО в єдину аналітичну**

### ***5.4.1. Загальні положення***

Останнім часом все більшу увагу приділяють чисельним методам комп'ютерного моделювання ЕТО, як об'єктів ідентифікації [1, 2, 3]. З одного боку це обґрунтовано складністю процесів у об'єкті, що досліджується (кусово-нелінійні залежності між його змінними, логіка переключення від однієї частинної моделі до іншої, нестационарність та стохастичність контрольованих і неконтрольованих параметрів і сигналів та інше), з іншого боку — майже необмеженими можливостями сучасних електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Однак заміна теоретичних досліджень чисельними на ЕОМ призводить до втрати загальності рішення тієї чи іншої задачі. Множина вирішень задачі чисельним моделюванням завжди обмежена. Тому існує ймовірність не змодельованої ситуації на об'єкті, яка може бути небажаною. Це, наприклад, стосується кусково-аналітичних моделей, заміни диференційних залежностей різнице-вими (особливо для нестійких об'єктів), апроксимації багатомірних нелінійних залежностей на кінцевій множині експериментальних даних поліномами високого степеня.

Парадоксально, але відсутність ЕОМ сприяла свого часу розвитку фундаментальних положень варіаційного обчислення Ейлера, розробці ортогональних базисних функцій Фур'є, Лягера, Лежандра, Хаара та інших, теорії оптимальної фільтрації Вінера і багатьох інших фундаментальних теорій у різних сферах науки. Це дозволяло вирішити задачі оптимізації систем у суто теоретичному загальному плані, гарантуючи бажані результати для всієї множини можливих ситуацій.

Тому за наявності ЕОМ доцільно максимально використовувати аналітичні рішення, користуючись чисельними методами і ЕОМ лише, як допоміжними засобами.

Розглянемо одну із таких задач: як отримати єдину аналітичну залежність для моделі ЕТО, яку подано кусково-аналітичними частковими моделями з логікою переключення від однієї до іншої залежно від координат об'єкта [9, 10, 11, 13].

#### 5.4.2. Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну

Якщо нелінійність  $y(x)$  та її похідні неперервні, то можливий її аналітичний опис  $y(x)$ , наприклад за теоремою Вєєрштраса, степеневим поліномом. Більшість нелінійних елементів реальних ЕТО мають кусково-аналітичну залежність  $y(x)$ . Під час аналізу і синтезу систем з такими елементами виникають незручності, пов'язані з врахуванням граничних умов переходу від однієї області змінних  $x, y$  до сусідньої. При зміні структури моделі нелінійності в досліджуваній системі, можуть виникати розриви  $y(x)$  та її похідних  $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$ . В той час, як у реальному ЕТО ці явища відсутні.

Ці та інші причини вимагають мати аналітичну модель  $y(x)$  в усій області зміни  $x, y$ , щоб виключити складну логіку зміни структури  $y(x)$  та некоректності диференціювання  $dy/dx, d^2y/dx^2, \dots$  у точках стиковки.

Складна кусково-аналітична нелінійність може бути представлена множиною аналітичних залежностей, справедливих за умови що змінні  $x, y$  знаходяться в  $i$ -й області їх існування,  $i = \overline{1, n}$ . При переході з  $i$ -ї в  $i+1$ -у чи  $i-1$ -у область  $y_i(x_i)$  повинна змінюватись на  $y_{i+1}(x_{i+1})$  чи  $y_{i-1}(x_{i-1})$ . Таку умову можна забезпечити, якщо залежність  $y(x)$  подати зваженою функціями ваги  $\eta_i(x)$  сумою  $y_i(x_i)$ :

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) y_i(x), \quad (5.81)$$

де  $\eta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x) \text{ належать } i\text{-й області,} \\ 0, & \text{якщо не належать.} \end{cases}$

Для забезпечення гладкості переходу в сусідню область функції ваги  $\eta_i(x)$ , повинні бути також гладкими, а не релейними, як при кусково-аналітичній апроксимації.

Аналогом таких функцій можуть бути частотні фільтри верхніх, середніх, нижніх частот. Тож, якщо покласти замість частоти  $\omega$  змінну  $x$ , то без суттєвих змін будемо мати можливість використати добре розвинену теорію частотних фільтрів для побудови функцій ваги  $\eta_i$ .

На відміну від фізично реалізованих фільтрів, де суттєвою є вимога нескладності, математично реалізовані — позбавлені цієї вимоги.

Наприклад тут, немає необхідності використовувати близькі більш-менш до ідеальних фільтри Баттерворда. Достатньо представити близькі до ідеального фільтри, як каскад з  $m$  найпростіших фільтрів 1-го порядку. Так для виділення області  $x$  від 0 до  $x=a$ , візьмемо  $m$  «фільтрів нижніх частот»:

$$\eta_1(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, a], a > 0, \quad (5.82)$$

де  $m$  береться за умови близькості з точністю до  $\epsilon$  моделі  $\hat{y}(x)$  до реальної залежності  $y(x)$ . Тобто  $m$  збільшується від 1 до значення  $m^*$  за якої міра близькості  $y(x)$  до  $\hat{y}(x)$  буде близька до бажаної  $\epsilon$ .

Для виділення області  $x$  від  $x=a$  до  $x \rightarrow \infty$  візьмемо  $m$  «фільтрів верхніх частот»:

$$\eta_2(x) = \left( \frac{|a^{-1}x|}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [0, \infty], x \in [-a, -\infty], \quad (5.83)$$

де  $m$  підбирається аналогічно. Для виділення області  $x$  від  $x=a$  до  $x=b$ ,  $b > a$ , візьмемо  $m$  «смугових фільтрів», побудованих з двох «фільтрів (5.82) нижніх частот  $a$  і  $b$ »:

$$\eta_3(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+b^{-2}x^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}x^2}} \right)^m, \quad x \in [a, b]. \quad (5.84)$$

Наведемо (для наочності) приклад аналітичного опису основної кривої намагнічування феромагнітного осердя котушки індуктивності. Згідно до рис. 5.14 маємо три області аналітичного опису  $y(x)$ :

$$\begin{aligned}
 y &= -y_{\max}, & -\infty < x \leq a_2; \\
 y &= \beta_1 x + \beta_2 x^3, & -a_2 < x \leq a_1; \\
 y &= y_{\max}, & a_1 \leq x < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{5.85}$$

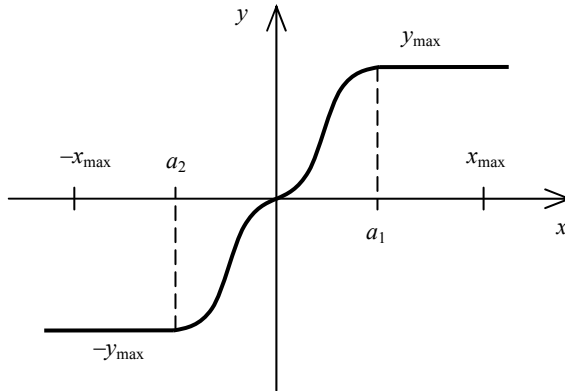


Рис. 5.14. Кусково-аналітична залежність  $y(x)$

У необмеженій області змінних  $x$  (фізично це може бути напруженість  $H$  магнітного поля, магніторушійна сила  $Iw$  чи магнітна напруга  $Hl$ ) залежність  $y(x)$  (магнітної індукції  $B$  чи магнітного потоку  $\Phi$ ) може бути представлена сумою трьох моделей (5.85) з ваговими функціями (5.88). Для цього слід ввести нову незалежну змінну  $z$ , яка б знакозмінну функцію  $x$  в області  $(-x_{\max}, +x_{\max})$  перетворювала в змінну одного знаку «плюс»:

$$z = x_{\max} - x. \tag{5.86}$$

Тоді аналітична у всьому діапазоні  $x$  залежність  $y(x)$  набуває вигляду

$$y(x) = -y_{\max} \eta_1(z) + y_{\max} \eta_2(z) + (\beta_1 x + \beta_2 x^3) \eta_3(z), \tag{5.87}$$

де

$$\eta_1(z) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m;$$



$$\eta_2(z) = \left( \frac{|(x_{\max} + a_2)^{-1} z|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a_2)^{-2} z^2}} \right)^m ;$$

$$\eta_3(z) = \eta_1(z, a_1) - \eta_1(z, a_2). \quad (5.88)$$

Якщо залежність  $y(x)$  (рис. 5.14) симетрична, тобто  $a_1 = -a_2 = a$ , тоді

$$y(x) = y_{\max} \left[ \left( \frac{|(x_{\max} + a)^{-1} z|}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m \right] +$$

$$+ (\beta_1 x + \beta_2 x^3) \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} + a)^{-2} z^2}} \right)^m - \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x_{\max} - a)^{-2} z^2}} \right)^m \right] \quad (5.89)$$

Аналітичність і гладкість моделі (5.89) дозволяє за необхідності, якщо  $x$  відома функція часу  $x(t)$ , обчислити аналітичні похідні

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ та т. ін.}$$

Для кінцевого значення числа  $m$  ці похідні будуть гладкими функціями часу, які можна аналітично обчислити вручну або за відповідних програм (Mathcad, MATLAB) на ПЕОМ.

За першою теоремою Веєрштраса залежність  $y(x)$  (рис. 5.14) може бути представлена в області  $\pm a$  степеневим поліномом.

Однак для достатньо широкої області  $(\pm x_{\max})$ , за однакової середньоквадратичної похибки апроксимації  $\epsilon$ , модель (5.89) буде значно простішою степеневому поліному.

Крім того, якщо вимірювання  $x$ ,  $y$  зроблені з кроком  $\Delta x$ , то за високих степенів поліному з'являються пульсації  $\hat{y}(x)$  в інтервалах  $\Delta x$  між вимірюваннями.

Визначивши, таким чином, непараметричну модель статичної нелінійної складової моделі Гамерштейна з довільної динаміки об'єкта ідентифікації, за умови компенсації невідомої динаміки, та виконавши структурно-параметричну апроксимацію цієї параметричної моделі нелінійності аналітичною в усьому діапазоні її існування моделлю, можна, за необхідністю, перейти до коректного визначення, лінійної динамічної складової моделі Гамерштейна, якщо тепер уже відомий сигнал  $f[U^*(t)]$  на вході динамічної складової моделі буде достатньо інформативним [14].

#### 5.4.3. Залежність ЕРС машини постійного струму (МПС)

Нехай з експерименту отримано залежність електрорушійної сили  $E$  від струму збудження  $I_3$  магнітного потоку індуктора (рис. 5.15, крива 1) [6].

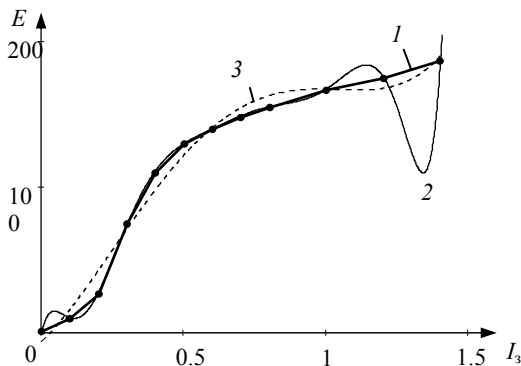


Рис. 5.15. Залежність  $E(I_3)$  та її апроксимація поліномами:  
1 — кусково-аналітично; 2 — дев'ятої степені; 3 — четвертої степені

На ділянці від  $I_3 = 0$  до  $I_3 = 0,7$  А залежність апроксимуємо кубічною параболою, а на ділянці, де  $I_3 \geq 0,7$  — лінійною залежністю:

$$\hat{E}(I_3) = \begin{cases} \beta_1 I_3^2 + \beta_2 I_3^3, & \text{якщо } I_3 < 0,7 \text{ А,} \\ \beta_3 + \beta_4 I_3, & \text{якщо } I_3 \geq 0,7 \text{ А.} \end{cases} \quad (5.90)$$

За методом найменших квадратів (МНК) визначимо оцінки  $\hat{\beta}_i$  коефіцієнтів  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :  $\hat{\beta}_1 = 1209$ ,  $\hat{\beta}_2 = -1365$ ,  $\hat{\beta}_3 = 111,2$ ,  $\hat{\beta}_4 = 54,1$ .

Якщо всю залежність  $E(I_3)$  описати по МНК степеневим поліномом з відносною середньоквадратичною похибкою (СКП) не більше 1 %, то отримаємо поліном дев'ятої степені. Для нього СКП в точках експерименту складає 0,53 %, але в проміжку між експериментальними точками має місце значна пульсація (рис. 5.15, крива 2).

Якщо зменшити ступінь поліному до чотирьох (рис. 5.28, крива 3), то суттєво зростає похибка апроксимації (СКП=8,1%). Тобто бажану високу точність апроксимації можна забезпечити лише кусково-поліноміальною логіко-аналітичною моделлю (5.90).

Щоб удосконалити спосіб кусково-поліноміальної апроксимації незручними логіко-аналітичними моделями (5.90), замінімо їх на аналітичні моделі, що являють собою суму часткових аналітичних моделей помножених на аналітичні в усьому інтервалі змінних вагові функції — «фільтри»  $\eta(I_3)$ :

$$\hat{E}(I_3) = (\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3) \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 I_3) \eta_2(I_3),$$

$$\text{де, підставивши } \eta_1(I_3) = \left(1 + (I_3/0,7)^n\right)^{-1}, \quad \eta_2(I_3) = \left(1 + (0,7/I_3)^n\right)^{-1},$$

отримаємо просту і досить точну залежність:

$$\hat{E} = \frac{(\beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3)}{1 + (0,43 I_3)^n} + \frac{(\beta_3 + \beta_4 I_3)}{1 + (0,7/I_3)^n}. \quad (5.91)$$

Залежність відносної СКП від степені  $m$  в моделі (5.91) подано в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Залежність відносної СКП

$n$	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	80	38	11	8	4	3	1,9	2,1

Аналітичність моделі (5.91) дозволяє, наприклад, аналітично визначити у будь-якій точці величину чутливості  $E$  до  $I_3$ , пропорційну магнітній проникності  $\mu$  середовища ДПС і використати її для побудови розімкненої системи автоматичного регулювання напруги ГПС або швидкості обертання ДПС, діагностувати стан магнітного кола індуктора МПС та ін.

У даному прикладі  $\eta_1(I_3)$  дорівнює  $m$  послідовно ввімкнених низькочастотних фільтрів частоти  $\omega$ ;  $\eta_2(I_3)$  — високочастотних,  $\omega = I_3$ .

#### 5.4.4. Аналітична модель залежності температури $\theta$ у камері горіння на ТЕЦ від витрат повітря $G_{\text{пов}}$ і палива $G_{\text{пал}}$

Задача оптимізації режиму горіння актуальна для теплових електростанцій.

Температура  $\theta$  °С в камері згоряння кусково-аналітично залежить від витрат повітря, за умови фіксованих витрат палива (рис. 5.16).

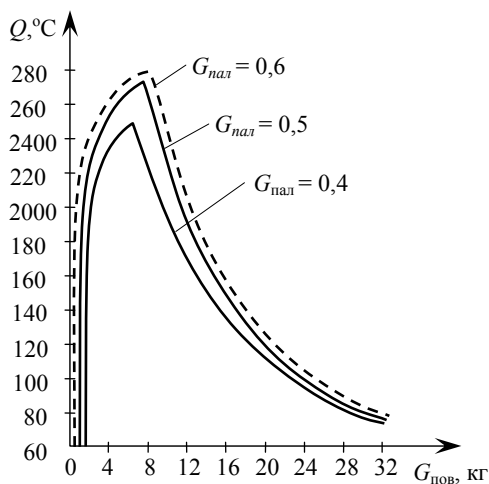


Рис. 5.16. Множина залежностей  $\theta(G_{\text{пов}}, G_{\text{пал}})$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{624,6G_{\text{пов}}}{0,1+0,23G_{\text{пов}}}, & \text{якщо } 0 \leq G_{\text{пов}} \leq 7,5 \text{ кг/с}, \\ \frac{4650+4,6G_{\text{пов}}}{0,1+0,23G_{\text{пов}}}, & \text{якщо } G_{\text{пов}} > 7,5 \text{ кг/с}. \end{cases} \quad (5.92)$$

Логіко-аналітичний опис (5.92) можна, згідно до запропонованого методу, замінити аналітичним для всього діапазону зміни  $G_{\text{пов}}$ :

$$\hat{\theta}(G_{\text{пов}}) = \frac{(624,6G_{\text{пов}})\eta_1(G_{\text{пов}})}{0,1+0,23G_{\text{пов}}} + \frac{(4650+4,6G_{\text{пов}})\eta_2(G_{\text{пов}})}{0,1+0,23G_{\text{пов}}}. \quad (5.93)$$

У табл. 5.3 наведено відносну СКП апроксимації кусково-аналітичної моделі (5.92) аналітичною (5.93) залежно від числа  $m$  у вагових функціях  $\eta_1$  і  $\eta_2$ , які подібні використаним у моделі (5.91).

Таблиця 5.3

Залежність відносної СКП від  $n$

$n$	2	4	8	10	20	40	80	100
СКП %	17	5,6	1,9	1,4	0,7	0,2	0,02	0,004

Доцільно величину  $m$  обмежити за умови, щоб СКП моделі була близькою до СКП вимірів  $\theta^\circ$ .

#### 5.4.5. Аналітична модель нелінійності характеристики заслінки магістрального газопроводу

Якщо треба виділити більше двох суміжних областей, додатково скористаємося «смуговими фільтрами» — ваговими функціями.

Відома структура математичної моделі залежності обертаючого моменту  $M$  затвора безопорної поворотної заслінки трубопроводу (рис. 5.17) від кута обертання  $\alpha$ :

$$M = a(\alpha)\Delta PD^3, \quad (5.94)$$

де  $\Delta P$  перепад тиску на диску;  $D$  — діаметр диска, який обертається на кут  $\alpha$  змінює момент  $M$ .

Невідому залежність коефіцієнта  $a$  від кута  $\alpha$  доцільно представити кусково-аналітичною моделлю, а саме — двома параболою та прямою

$$\hat{a}(\alpha) = \begin{cases} \beta_1 \alpha^2, & \alpha \in [0, 60^\circ], \\ \beta_2 + \beta_3 (\alpha - 70^\circ)^2, & \alpha \in [60^\circ, 80^\circ], \\ \beta_4 + \beta_5 (\alpha - 80^\circ), & \alpha \in [80^\circ, 90^\circ] \end{cases} \quad (5.95)$$

яка приводиться до однієї аналітичної залежності:

$$\hat{a}(\alpha) = \beta_1 \alpha^2 \eta_1(\alpha) + [\beta_2 + \beta_3 (\alpha - 70^\circ)^2] \eta_2(\alpha) + [\beta_4 + \beta_5 (\alpha - 80^\circ)] \eta_3(\alpha), \quad (5.96)$$

де вагові функції  $\eta_i(\alpha)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) мають, подібно до частотних фільтрів, наступний вигляд:

$$\eta_1(\alpha) = \frac{1}{1 + (\alpha/60)^n}, \quad \eta_2(\alpha) = \frac{1}{1 + (60/\alpha)^n} \cdot \frac{1}{1 + (\alpha/80)^n},$$

$$\eta_3(\alpha) = \frac{1}{1 + (80/\alpha)^n},$$

де  $n$  — досить велике число ( $20 \div 80$ ) послідовно ввімкнених «фільтрів», вибране за умови близькості СКП моделі (5.96) до СКП вимірів моменту  $M$ .

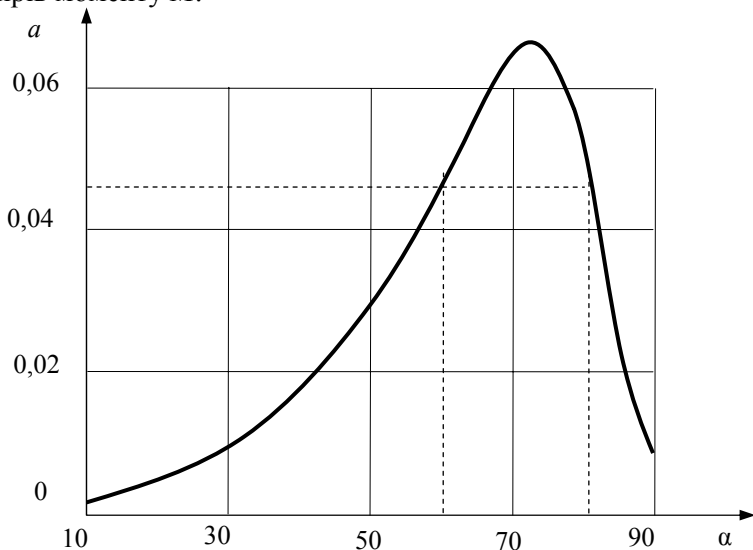


Рис. 5.17. Характеристика заслінки газопроводу

#### 5.4.6. Аналітична модель вольт-амперних характеристик транзисторів

Розглянемо аналітичний опис кусково-аналітичних вольт-амперних характеристик транзистора та визначення аналітичних залежностей  $h$ -параметрів транзистора від змінних координат робочої точки.

Недоліки відомих способів побудови статичної кусково-аналітичної нелінійної характеристики об'єкта ідентифікації єдиною аналітичною моделлю є те, що така залежність за заданої точності апроксимації може бути надто складною, в той час як на окремих ділянках локальні моделі можуть бути досить простими.

Як правило, шукану залежність на всьому діапазоні подають у вигляді суми відомих (базисних) функцій, коефіцієнти при яких підбирають за умови найкращої (за відповідним показником) апроксимації експериментально знятої залежності відповідною моделлю. Така модель за заданої точності апроксимації може бути надто складною, що крім того може привести до пульсації в проміжках між експериментально знятими точками, як було показано на рис. 5.18.

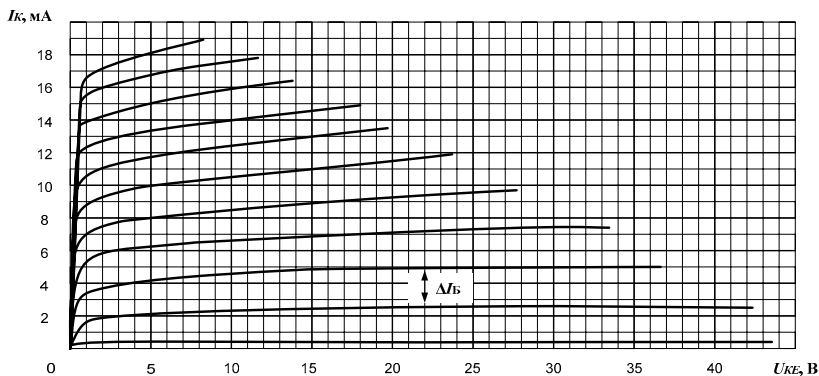


Рис. 5.18. ВАХ транзистора МП25, МП26,  $\Delta I_B = 0,1 \text{ mA}$  0,1 mA

Якщо ж використовується кусково-поліноміальна апроксимація, то така модель вже не є аналітичною у всьому діапазоні, а вимагає доповнення додатковими логічними умовами, які еквівалентні помноженню часткових моделей нелінійності на неаналітичні (негладкі) сігнум-функції.

У результаті цільно-аналітичний опис системи розпадається на локально аналітичні з логікою зміни структури системи залежно від області, в якій знаходяться змінні об'єкта.

У випадку, якщо нелінійність багатовимірна  $y(x_1, \dots, x_n)$  кусково-поліноміальна, то її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одномірній, тільки функції ваги будуть багатовимірними  $\eta_i(x_1, \dots, x_k, x_n)$ , де  $x_k$  — незалежні змінні.

Досить просто можна їх подати у вигляді добутків часткових одновимірних функцій  $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$ , тобто

$$\eta_i(x_1, \dots, x_n) = \eta_{i1}(x_1) \eta_{i2}(x_2) \cdot \dots \cdot \eta_{in}(x_n).$$

Для прикладу розглянемо вольт-амперну характеристику (ВАХ)  $I_K(U_{KE})$  біполярного транзистора (рис. 5.18). Такі і їм подібні одно- і багатовимірні залежності можна описати кусково-аналітичними функціями. Але такий опис не буде суто аналітичним, бо вони доповнюються логічними не аналітичними функціями. Кусково-лінійна залежність  $I_K(U_{KE})$  (рис. 5.19) для фіксованого значення струму  $I_B$  транзисторів МП25, МП26 дорівнює:

$$\hat{I}_K(U_{KE}, I_B) = \begin{cases} \beta_{1i} U_{KE}, & \text{якщо } U_{KE} < 0,8 V, \\ \beta_{2i} + \beta_{3i} U_{KE}, & \text{якщо } U_{KE} \geq 0,8 V, i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5.97)$$

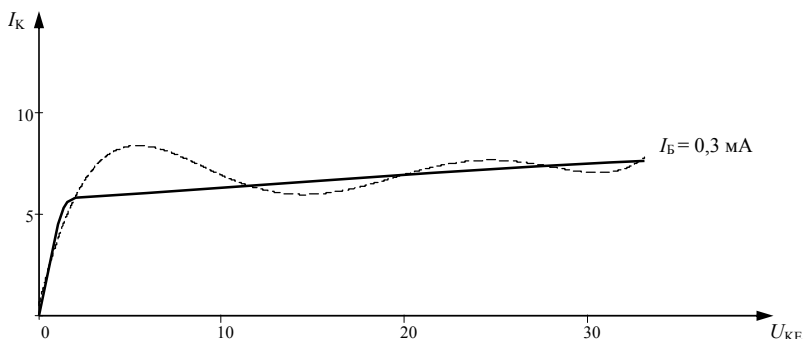


Рис. 5.19. Апроксимація ВАХ транзистора поліномом п'ятої степені

Для того, щоб позбавитися логічних складових опису, замінимо логічні складові аналітичними для всього діапазону зміни відповідних аргументів.



Тобто, введемо функції ваги  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$ , які, подібно до частотних фільтрів, виділяють з бажаною точністю  $\Delta$  окремі підобласті всього діапазону.

Тоді, замість кусково-аналітичної моделі (5.97), отримаємо аналітичну на всьому інтервалі  $U_{KE}$  модель:

$$\hat{I}_K = (\beta_{1i} U_{KE}) \eta_1 + (\beta_{2i} + \beta_{3i} U_{KE}) \eta_2, \quad (5.98)$$

$$\text{де } \eta_1(U_{KE}) = \left( 1 + \left( \frac{U_{KE}}{0,8} \right)^n \right)^{-1}, \quad \eta_2(U_{KE}) = \left( 1 + \left( \frac{0,8}{U_{KE}} \right)^n \right)^{-1}, \quad n \gg 1.$$

При описі цієї залежності єдиним у всьому діапазоні степеневим поліномом матимемо наближену апроксимацію з пульсацією між вимірами (рис. 5.19, пунктир).

Так опис степеневим поліномом п'ятої степені має незначну, для заданих точок, відносну середньоквадратичну похибку (СКП) 0,79 %, але містить значні пульсації між ними. Для порівняння СКП моделі (5.98) при  $n = 10$  дорівнює 2,2 %.

Враховуючи, що ВАХ транзистора двовимірною  $y(x_1, x_2)$  кусково-поліноміальна, то її об'єднання в єдину аналітичну досягається аналогічно одномірній, тільки функції ваги  $\eta_i(x_1, x_2)$ , де  $x_k$  — незалежні змінні  $U_{KE}, I_K$ , задаються у вигляді добутоків часткових функцій  $\eta_{ij} = \eta_i(x_j)$ , тобто

$$\eta_i(x_1, x_2) = \eta_{i1}(x_1) \eta_{i2}(x_2).$$

За допомогою функції  $\eta_3(I_B) = \left( 1 + (I_B/1,1)^n \right)^{-1}$  обмежимо модель (2) діапазоном  $I_B$  від 0 до 1,1 мА і апроксимуємо залежність коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) від другої змінної  $I_B$ , лінійною моделлю:

$$\hat{\beta}_i(I_B) = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} I_B,$$

У результаті отримуємо єдину аналітичну модель

$$\hat{I}_K = (\beta_1(\gamma) U_{KE} \eta_3) \eta_1 + ((\beta_2(\gamma) + \beta_3(\gamma) U_{KE}) \eta_3) \eta_2,$$

графік якої (рис. 5.20) співпадає з графіком наданим у довіднику (рис. 5.18) з СКП 2,6 %, а для робочої області 1 складає менше 1 %.

#### 5.4.7. Аналітична модель «асинхронний двигун — відцентровий насос»

Експлуатуючи відцентровий насос у магістральній мережі водопостачання, важливо знати, яким чином він себе поведе, якщо режим роботи буде змінюватись.

Практичний інтерес представляє можливість застосування насоса для забезпечення різноманітних вимог технологічних споживачів, коли мають місце зміни трьох основних взаємозв'язаних параметрів: витрат ( $Q$ ), напору ( $H$ ) та числа обертів ( $n$ ) робочого колеса, пов'язаного з валом потужного асинхронного електродвигуна [8].

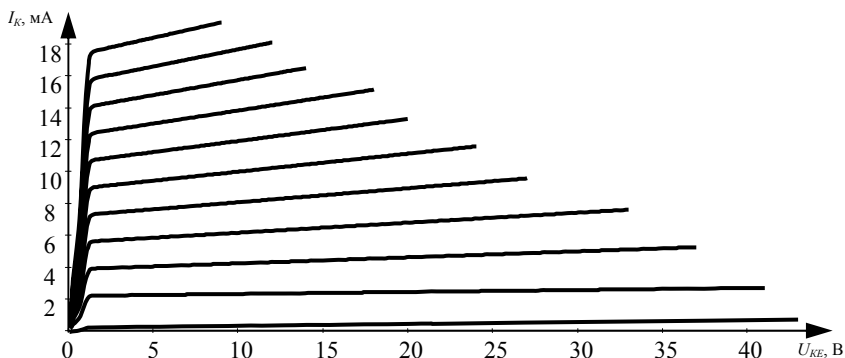


Рис. 5.20. Графік аналітичної моделі ВАХ транзистора

На рис. 5.21 наведено сукупність ( $Q$ – $H$ )-характеристик насоса Д6300-80-2 з числом обертів робочого колеса  $n_1 = 730$  об/хв та  $n_2 = 585$  об/хв, зовнішній діаметр робочого колеса  $D_1 = 1020$  мм,  $D_2 = 970$  мм та  $D_3 = 915$  мм, де напір  $H$  вимірюється у метрах [м], а витрата  $Q$  — у [м<sup>3</sup>/год].

Напірна характеристика має декілька зон.

Початкова точка відповідає роботі насоса на закрити засувку на напірному патрубку.

Оптимальна точка напірної характеристики відповідає максимальному значенню ККД.

Якщо напірна характеристика подається кратним рядом Тейлора чи його степеневим аналогом

$$H(Q, D, n) = H_0 + \sum_i \alpha_i Q_i + \sum_i \beta_i D_i + \sum_i \gamma_i n_i + \sum_i \sum_j \alpha_{ij} Q_i D_j + \sum_i \sum_j \beta_{ij} Q_i n_j + \dots + \sum_i \gamma_{ij} n_i^2, \quad (5.99)$$

то залишається проблема не монотонності моделі (5.99) через високий порядок поліномів  $H(Q, \alpha)$ , якщо цією залежністю подається весь діапазон витрати  $Q$  (від 0 до 8000 м<sup>3</sup>/год).

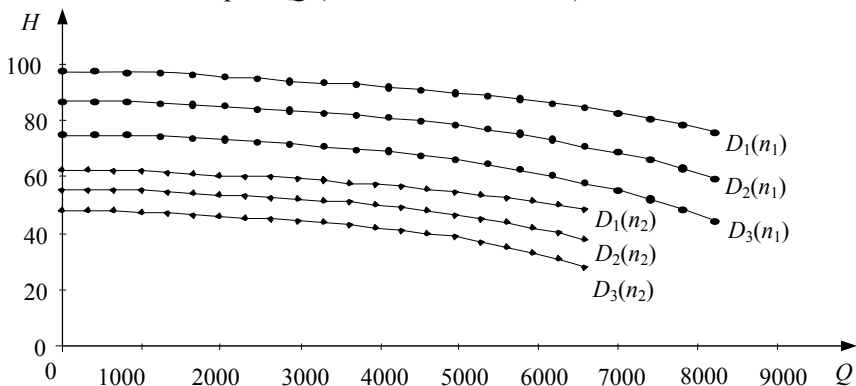


Рис. 5.21. Множина напірних характеристик насоса Д6300-80-2

Тому залежність  $H(Q)$  має кусково-поліноміальний характер: у діапазоні витрати від 0 до 4000 м<sup>3</sup>/год залежність слабо нелінійна, а у робочій зоні від 4000 до 8000 м<sup>3</sup>/год має місце зростаюча нелінійність. Точне подання такої залежності на всьому діапазоні зміни  $Q$  потребує застосування полінома високої степені і досить складного та коштовного експерименту.

При цьому, якщо кількість точок обмежена, то між ними, як уже відмічалось, виникають коливання (рис. 5.22) через значне значення порядку моделі (5.99).

Для вирішення цієї проблеми залежність  $H(Q, \alpha)$  подається сумою двох простих локальних моделей, дія яких обмежується (подібно до частотних фільтрів) ваговими функціями  $\eta(Q)$ :

$$H(Q, \alpha) = H_1(Q_1, \alpha') \eta_1(Q) + H_2(Q_1, \alpha'') \eta_2(Q), \quad (5.100),$$

де  $H_1(Q_1, \alpha) = \alpha'_0 + \alpha'_1 Q + \alpha'_2 Q^2$ ;  $H_2(Q_1, \alpha) = \alpha''_0 + \alpha''_1 Q + \alpha''_2 Q^2$ ,

$$\eta_1(Q) = \frac{1}{1 + (\bar{Q}/K_1)^n}; \eta_2(Q) = \frac{1}{1 + (K_2/\bar{Q})^n}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_{\max}},$$

$$\alpha'_i = \beta'_{0_i} + \beta'_{1_i} D + \beta'_{2_i} D^2; \alpha''_i = \beta''_{0_i} + \beta''_{1_i} D + \beta''_{2_i} D^2,$$

$$\beta'_{ji} = \gamma'_{0_{ji}} + \gamma'_{1_{ji}} n; \beta''_{ji} = \gamma''_{0_{ji}} + \gamma''_{1_{ji}} n.$$

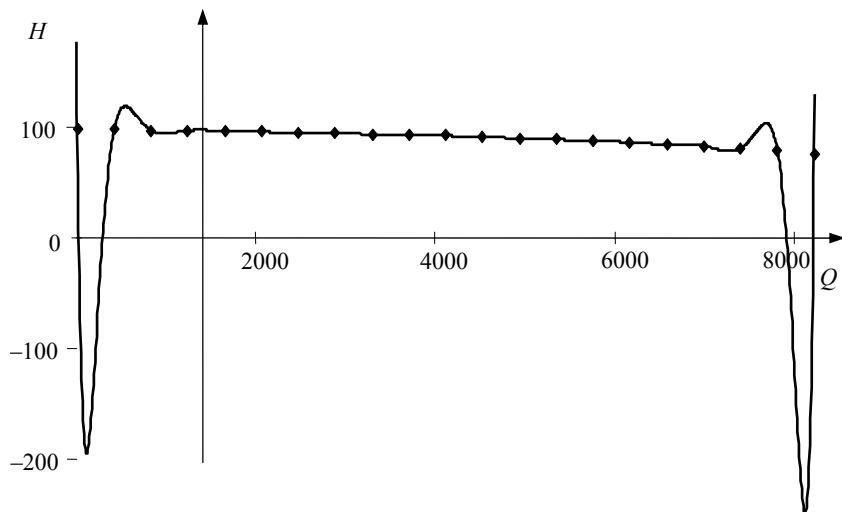


Рис. 5.22. Виникнення коливань між вимірами внаслідок високого порядку полінома (5.99)

Через селективну спроможність вагових функцій  $\eta_i(Q)$ ,  $i = 1, 2$ , матриця МНК буде блочно-діагональною. Тоді вектори  $\alpha'$  та  $\alpha''$  моделі (5.100) визначаються взаємно незалежно, а їх розмірність незначна. Разом з тим зазначена модель спроможна з високою точністю подати залежність  $H(Q, D, n)$ . На рис. 5.23 наведено результат застосування моделі (5.100) для побудови сукупності напірних характеристик насоса Д6300-80-2 з електричним приводом.

У результаті застосування запропонованого методу побудови та наступної композиції простих окремих моделей у загальну, а також процедури регуляризації, отримано достатньо точну (нормована середньоквадратична помилка складає 0,15 % від максимального значення  $H$ , тобто 0,154 м) і порівняно просту модель (5.100) залежності  $H(Q, n, D)$ , яка може бути використана для оптимізації режиму роботи насосної станції в ЕТК.

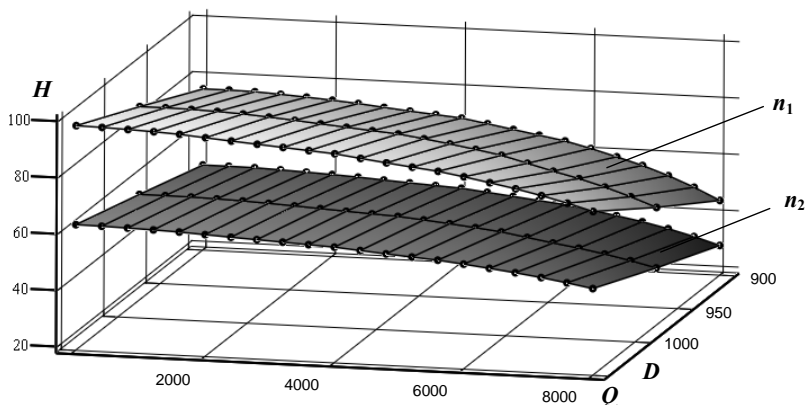


Рис. 5.23. Модель залежності напору  $H$  від витрати  $Q$ , зовнішнього діаметра робочого колеса  $D$  та кількості обертів  $n$  асинхронного електродвигуна

#### 5.4.8. Побудова аналітичної моделі забезпечення інваріантності напруги $U_{\text{я}}$ до струму $I_{\text{я}}$ якоря генератора постійного струму (ГПС)

Рівняння змінних  $U_{\text{я}}$ ,  $E_{\text{я}}$ ,  $I_{\text{я}}$ ,  $I_3$ ,  $U_3$  стану ГПС:

$$\begin{cases} U_{\text{я}} = E_{\text{я}}(I_3) - I_{\text{я}} R_{\text{я}}; \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} + I_3(t) R_3 + U_3(t), \end{cases} \quad (5.101)$$

де параметрами виступають  $R_{\text{я}}$  — електричний опір якоря ГПС;  $L_3$ ,  $R_3$ ,  $I_3$  — індуктивність і опір кола збудження магнітного потоку струмом  $I_3$ , від якого нелінійно залежить електрорушійна сила  $E_{\text{я}}$ .

Згідно до вище наведених методів непараметричної і кусково-аналітичної ідентифікації було отримано (рис. 5.24) нелінійну статичну залежність  $E(I_3)$ :

$$E(I_3) \cong (\beta_0 + \beta_1 I_3 + \beta_2 I_3^3) \eta_1(I_3) + (\beta_3 + \beta_4 I_3) \eta_1(I_3), \quad (5.102)$$

де вагові функції мають наступний вигляд:

$$\eta_1(I_3) = \left(1 + (1,43 \cdot I_3)^{40}\right)^{-1},$$

$$\eta_2(I_3) = \left(1 + (0,7 \cdot I_3^{-1})^{40}\right)^{-1}. \quad (5.103)$$

Параметри ( $\beta_0 \div \beta_4$ ) параметричної моделі (5.102) отримано по МНК з непараметричної моделі (рис. 5.24), а непараметричну отримано за умови мінімуму показника Пухова–Хатіашвілі [4].

Для компенсації інерційності і лінеаризації каналу управління ГПС послідовно ввімкнемо інверсну до моделі (5.102, 5.103) нелінійну коригувальну ланку (КЛ).

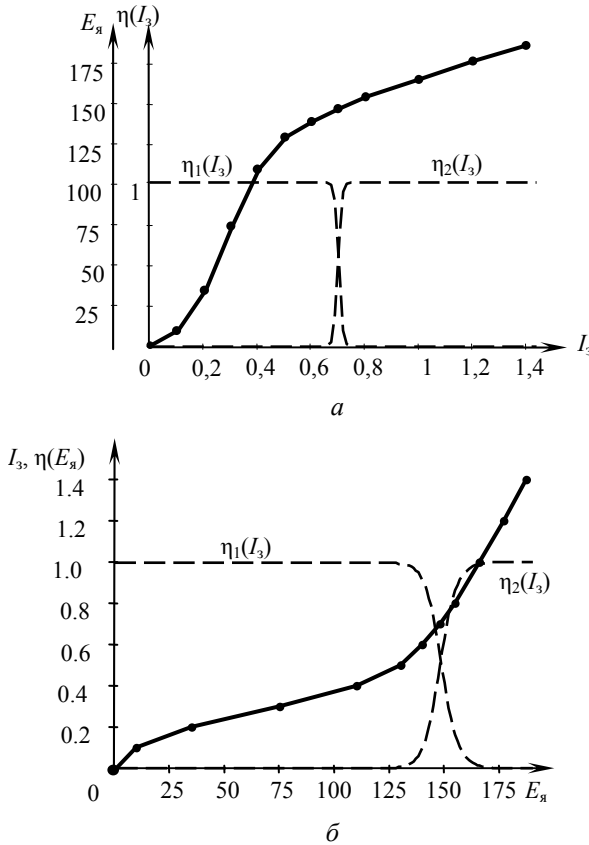


Рис. 5.24. Графіки прямої та зворотної залежності:  
 а —  $E_{\text{я}}(I_3)$  (точки) та її апроксимація (лінія);  
 б —  $I_3(E_{\text{я}})$  (точки) та її апроксимація (лінія)

Інверсна до залежності (5.102) модель  $\hat{I}_3(E_{\text{я}})$  (рис. 5.24, б), як рішення рівняння (5.102):

$$\hat{I}_3(E_{\text{я}}) = \hat{I}_{31}(E_{\text{я}})\eta_1(E_{\text{я}}) + \hat{I}_{32}(E_{\text{я}})\eta_2(E_{\text{я}}), \quad (5.104)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{I}_{31}(E_{\text{я}}) = & \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}} + \\ & + \sqrt[3]{\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{\beta_2} - \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{3\beta_2}\right)^3 + \left(\frac{E_{\text{я}} - \beta_0}{2\beta_2}\right)^2}}, \\ \hat{I}_{32}(E_{\text{я}}) = & \frac{E_3}{\beta_4} - \frac{\beta_3}{\beta_4}, \\ \eta_1(E_{\text{я}}) = & \left(1 + (0,0067 \cdot E_{\text{я}})^{40}\right)^{-1}, \\ \eta_2(E_{\text{я}}) = & \left(1 + (150 \cdot E_{\text{я}}^{-1})^{40}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Як витікає з рівняння (5.102, 5.103) ГПС і (5.104, 5.105) КЛ, якщо в результаті параметричної ідентифікації оцінки  $\hat{L}_3, \hat{R}_3, \hat{R}_{\text{я}}, \hat{E}_{\text{я}}(I_3)$  близькі до дійсних значень параметрів об'єкта, то в системі (рис. 5.25) має місце лінеаризація каналу управління по  $I_3$ , майже повна компенсація інерційності залежності  $I_3$  від  $U_3$  і залежності (5.101)  $U_{\text{я}}$  від  $I_{\text{я}}$ , як збурювального впливу:

$$U_{\text{я}} = U_{\text{я}}^* - (R_{\text{я}} - \hat{R}_{\text{я}})I_{\text{я}}. \quad (5.106)$$

Таким чином, завдяки досить точній ідентифікації параметрів  $R_3, R_{\text{я}}, L_3$  і побудові моделі (5.104), розімкнена система буде мати точнісні характеристики не гірше, ніж у замкненій, а також гарантовану стійкість і високу швидкодію.

#### **5.4.9. Побудова аналітичної моделі в задачі забезпечення максимальної потужності сонячної батареї**

В автономній системі «сонячна батарея — навантаження», наприклад, для БЛА, оптимальне керування (в сенсі зняття макси-

мальної потужності) полягає в регулюванні опору навантаження  $R_n$  залежно від електрорушійної сили  $E$  і струму  $I$  батареї, які в свою чергу залежать від освітлення, повільна зміна якого в часі носить випадковий характер.

Статистично оптимальна система, налаштована на найбільш імовірну освітленість буде мало ефективною.

Максимальна ефективність досягається, якщо періодично за дуже короткий час визначати з динаміки вольт-амперну характеристику (BAX)  $U(I)$  батареї і відповідно до неї регулювати  $R_n$ .

Для цього батарею за допомогою електронних ключів вимикають від навантаження і умикають до котушки індуктивності  $L$  з невеликим додатковим опором  $R_d$ , з якого знімається напруга пропорційна струму  $i(t)$ .

Сигнали напруги  $u(t)$  і струму  $i(t)$  (рис. 5.25) фіксуються і обробляються швидкодіючим електронним пристроєм, який на основі вище розглянутих методів визначає BAX  $U(I)$ , максимум  $U^* I^*$  потужності  $UI$  і відповідно до нього оптимальний опір  $R_n^*$ :

$$R_n^* = \frac{U^*}{I^*}. \quad (5.107)$$

Виміри (рис. 5.25)  $u(t)$  і  $i(t)$  мають випадкову шумову складову, динамічну коливальну складову на початку процесу розряду батареї на  $R_d L$  — навантаження (коливальність пов'язана з «паразитною» ємністю  $C_0$ ), систематичну майже сталу похибку  $\Delta U$ , пов'язану з впливом на  $u(t)$  опору паралельної до батареї  $R_d L$  — вітки:  $\Delta U = E - \frac{E1/R_{вн} + Ldi/dt}{1/R_{вн} + 1/R_d}$ .

За досить великої сталої  $L/R_d$  початкова частина експоненти струму заряду котушки має майже лінійний характер, тому похідна  $di/dt$  майже стала.

Статичну непараметричну модель  $U(I)$  (рис. 5.26) і майже співпадаючу з нею параметричну отримано з даних нелінійної динаміки відповідно до вище розглянутих алгоритмів:



$$U(I) = \eta_1(I)(\alpha_1 + \alpha_2 I^2) + \eta_2(I)(\beta_1 + \beta_2 I + \beta_3 I^2), \quad (5.108)$$

$$\text{де } \eta_1(I) = \frac{1}{1 + (0,67 \cdot I)^{45}}, \quad \eta_2(I) = \frac{1}{1 + (1,5 \cdot I^{-1})^{45}}, \quad \alpha_1 = 20,$$

$$\alpha_2 = -1,06, \quad \beta_1 = -315, \quad \beta_2 = 432, \quad \beta_3 = -140.$$

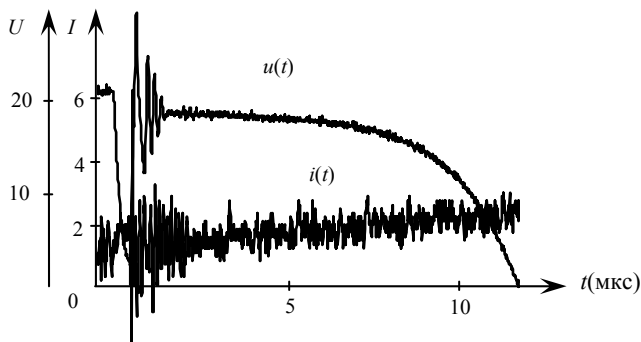


Рис. 5.25. Графіки вимірів  $u(t)$  і  $i(t)$

Аналітичну модель залежності потужності  $P$  від  $U$  отримаємо як добуток  $U(I)$  на струм  $I$  (рис. 5.26). Оптимальні значення  $I^*$  струму, визначені за умови максимальної потужності батареї,  $I^* = \arg\max_U P = 1,56 \text{ A}$ , оптимальне навантаження (5.107)  $R_n^* \cong 12,3 \text{ Ом}$  та потужність  $P_{\max} = 29,9 \text{ Вт}$ .

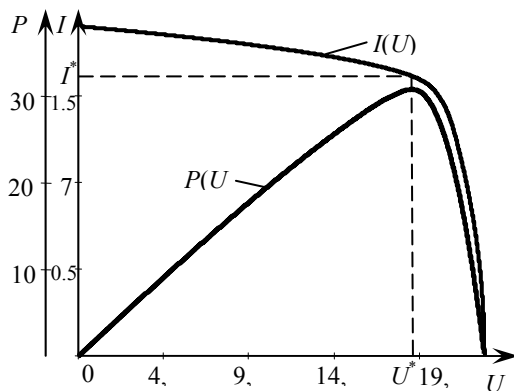


Рис. 5.26. Непараметрична і майже співпадаюча з нею параметрична (5.108) моделі ВАН  $I(U)$  та залежність  $P(U)$

#### **5.4.10. Побудова аналітичних моделей закономірності у вібраціях електричних машин для діагностики та прогнозування їх стану**

У будь-якій машині, яка рухається чи має рухомі деталі в ЕТК обов'язково присутні вібрації, за якими можна однозначно ідентифікувати машину, здійснювати діагноз та прогнозування її працездатності.

Це дає можливість для профілактики та попередження відмов, на перший погляд раптовий характер яких є найчастіше причиною серйозних аварій.

На сьогоднішній день недостатньо опрацьованими залишаються питання встановлення граничних характеристик вібрацій, і як наслідок, визначення залишкового ресурсу роботи.

Останнє становить важливу задачу діагностики.

Оцінювати стан того чи іншого елемента машини виявилось можливим не тільки за амплітудою вібрацій  $A$ , яка не повинна перевищувати допустимого значення  $A_{\text{доп}}$ , а і за швидкістю  $a$  зміни амплітуди акустичного сигналу  $a = dA/dt$ .

Від початку роботи елемента системи до виходу його з ладу амплітуда  $A$  акустичного сигналу змінюється за характерною кривою (рис. 5.27, 5.28).

На періоді припрацювання її амплітуда нижче номінальної  $A_{\text{ном}}$ . Далі вона поступово зростає в інтервалі, що відповідає нормальному режиму експлуатації елемента.

Після цього настає період інтенсивного зносу і накопичення утомних напруг. Цей період характеризується інтенсивним зростанням амплітуди, досягненням граничного значення  $A_{\text{max}}$ , за якого відбувається руйнування елемента.

У поточний момент часу  $T_i$ , знаючи граничний показник  $A_{\text{гр}}$  і характер зміни кривої, можна визначити залишковий ресурс елемента.

Обґрунтування граничних значень амплітуд і вивчення характеру залежності амплітудної кривої в передграничному періоді є завданнями теоретичних і експериментальних досліджень [8].

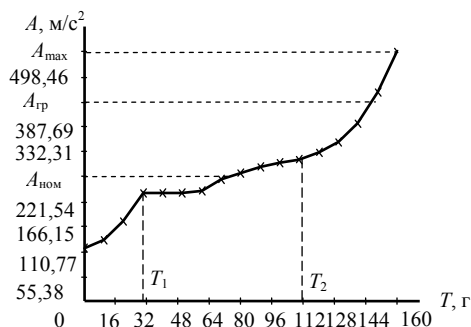


Рис. 5.27. Зміна з плином часу рівня вібрації редуктора

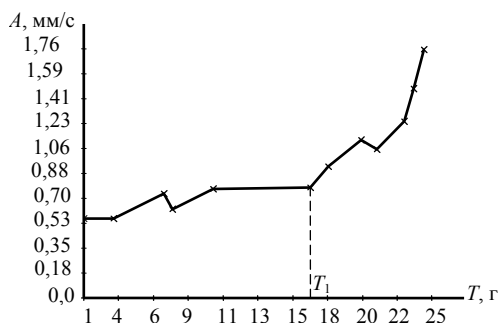


Рис. 5.28. Зміна з плином часу рівня вібрації підшипника кочення

Працюючу машину можна подати деяким перетворювачем  $G$  вектору  $R$  параметрів  $r_i$  (які визначають її технічний стан) у вектор  $U$  діагностичних ознак  $U_j$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,n$ . Тоді задача діагностики машини полягатиме в установленні функціонального зв'язку між  $R$  і  $U$ :

$$\{U\} = G^{-1}\{R\}, \quad (5.109)$$

або в скалярному вигляді

$$r_i = f_i(u_1, \dots, u_m). \quad (5.110)$$

В окремому випадку, система (5.109) розпадається на  $n$  одно-мірних залежностей

$$r_i = f_i(u_j). \quad (5.111)$$

Недоліком такого методу є неадекватність такої моделі більшості реальних залежностей  $r(u)$  унаслідок їх кусково-аналітичності, що, наприклад, спостерігається в залежності від часу  $T$  рівня вібрації редуктора на валу електродвигуна внаслідок зношеності зубців шестерень (рис. 5.27), а також залежності вібрації підшипника кочення від часу (рис. 5.29).

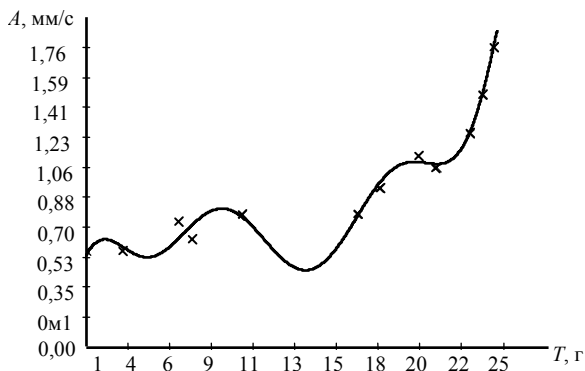


Рис. 5.29. Виникнення пульсацій при апроксимації поліномом дев'ятої степені

Для виключення надскладних моделей (степеневих поліномів високої степені), які за обмеженої кількості точок можуть приводити до пульсації модельної залежності між точками (рис. 5.29, точки між  $T = 11$  і  $T = 12$ ), доцільно скористатися методом кусково-аналітичного опису простими локальними залежностями з подальшим їх об'єднанням в єдину аналітичну залежність шляхом використання вагових функцій  $\eta(U)$ , які аналітичні у всьому діапазоні  $U$ , але близькі до одиниці у своєму і до нуля в чужих діапазонах.

Так для залежності  $A(T)$  (див. рис. 5.27) маємо три області і три локальні моделі:

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \beta_{01} + \beta_{11}T^2, \\ A_2(T) &= \beta_{02} + \beta_{12}(T - T_1), \\ A_3(T) &= \beta_{03} + \beta_{13}(T - T_2)^2, \end{aligned} \quad (5.112)$$

які об'єднано в єдину модель (рис. 5.30).

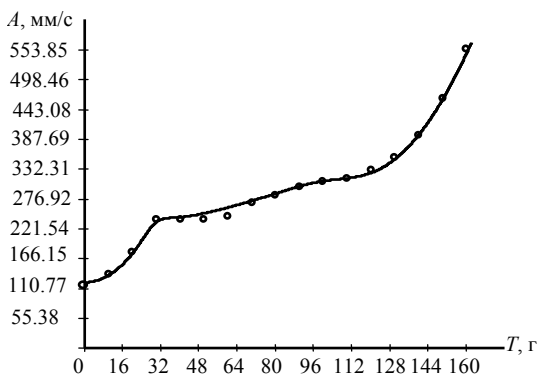


Рис. 5.30. Модель зміни рівня вібрації редуктора

$$A(T) = \eta_1(T)A_1(T) + \eta_2(T)A_2(T) + \eta_3(T)A_3(T) \quad (5.113)$$

з ваговими функціями

$$\eta_1 = 1 / \left( 1 + (T_1/T)^n \right), \quad \eta_3 = 1 / \left( 1 + (T_2/T)^n \right), \quad n \in [10 \div 30],$$

$$\eta_2 = \left( 1 / \left( 1 + (T_1/T)^n \right) \right) \times \left( 1 / \left( 1 + (T/T_2)^n \right) \right). \quad (5.114)$$

Аналогічно для  $A(T)$  на рис. 5.29, отримано модель  $A(T) = A_1(T)\eta_1 + A_2(T)\eta_2$  (рис. 5.31):

$$A_1(T) = \beta_{01} + \beta_{11}T, \quad A_2(T) = \beta_{02} + \beta_{12}(T - T_1)^3, \quad (5.115)$$

$$\eta_1 = 1 / \left( 1 + (T/T_1)^n \right), \quad \eta_2 = 1 / \left( 1 + (T_1/T)^n \right), \quad n \in [10 \div 30].$$

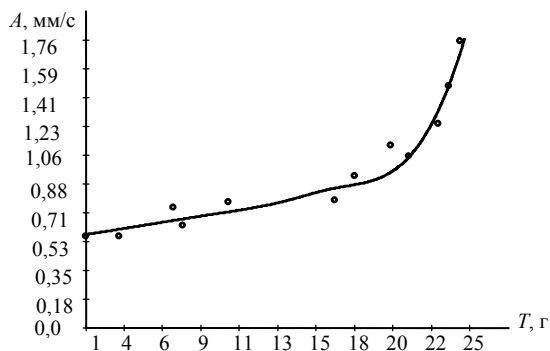


Рис. 5.31. Модель зміни рівня вібрації підшипника

Аналітичність моделей, тобто неперервність функції та її похідних, дає можливість розширити множину діагностичних ознак, наприклад похідними від  $r_i$  по  $u_j$ :

$$\frac{dr_i}{du_j} = f_{ij}(u_j), \quad \frac{d^2 r_i}{du_j^2} = f'_{ij}(u_j), \quad (5.116)$$

які вказують на темп змін  $r_i$  від  $u_j$ .

Маючи гладку аналітичну залежність, за другою похідною можна виявити моменти переходу машини із зони нормальної експлуатації в передаварійну зону.

Так на рис. 5.32 для моделі (5.113), подано її першу і другу похідні від  $A$  по  $T$ , які чітко (особливо друга похідна) вказують на перехід з першої зони в другу ( $T = 30$ ), і з другої в третю ( $T = 110$ ).

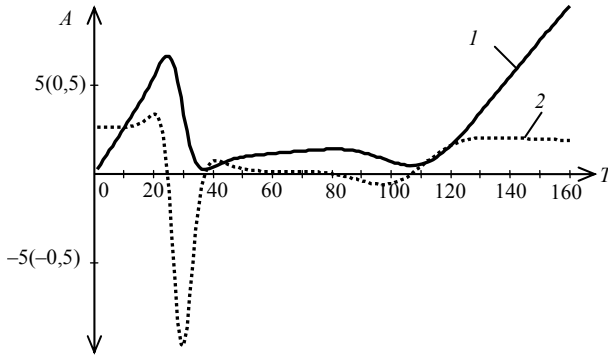


Рис. 5.32. Перша (1) і друга (2) похідні від  $A$  по  $T$  моделі

З лінійності першої похідної для передаварійної ділянки рис. 5.30 можна розрахувати і спрогнозувати час за якого амплітуда  $A$  досягне аварійного значення  $A_{\max}$  і своєчасно попередити ава-

рію:  $A_{\max} - A_i = \frac{dA}{dT}(T_a - T_i)$ , звідки

$$T_a = \frac{A_{\max} - A_i}{dA/dT} + T_i. \quad (5.117)$$

Здається доцільним використовувати в якості ознаки не тільки амплітуду  $A$  вібрацій, а в цілому спектр вібрацій, розкладаючи сигнали віброметра в ряд Фур'є.

Чим ширше спектр сигналу, тим більш прямокутні імпульси вібрацій, тобто крутіші їх фронти і, як наслідок, більші руйнуючі сили вібрацій, які пропорційні прискоренню  $a$  маси в момент удару.

Таким чином, використання метода кусково-аналітичного опису простими локальними моделями з подальшим об'єднанням їх в єдину аналітичну модель шляхом помноження кожної з них на аналітичну у всьому діапазоні вагову функцію і складання їх разом, дає можливість отримати просту та достатньо точну аналітичну модель виду (5.111).

Немає особливих труднощів за такого підходу отримувати і багатомірну модель (5.110).

### 5.5. Використання трьох типів моделей для забезпечення збіжності процесу параметричної ідентифікації

Припускається, що для досліджуваного ЕТО відображення  $f^*(x^*, \beta^*, t)$ , де вхід  $x(t)$ , вихід  $y(t)$ , може бути з малою похибкою  $\delta$  представлено паралельною  $f(x, \hat{\beta}, t)$ , послідовно-паралельною або композицією з паралельної і лінійної (за вектором параметрів  $\beta'''$ ) додаткових моделей [5]:

$$y(t) = (\beta''')^T \varphi^T(x, \beta, t), \quad (5.118)$$

де

$$(\beta''')^T = [\beta_1''', \dots, \beta_r'''],$$

$$\varphi^T(\cdot) = [\varphi_1(x, \beta, t), \dots, \varphi_r(x, \beta, t)].$$

Вважається, що сигнал  $x(t)$  вимірюється досить точно. Сигнал на виході складається з точного значення  $y^*(t)$  випадкової складової  $\tilde{\epsilon}(t)$  і складової  $\epsilon^*(t)$  загальної похибки, пов'язаної з неточністю структури моделі

$$y(t) = y^*(t) + \hat{\epsilon}(t) + \epsilon^*(t).$$

Апріорна інформація про  $\hat{\beta}^*$  відсутня, тому функціонал  $J(\epsilon)$  у загальному випадку є функцією від  $\Delta\beta$ , яка має декілька екстре-

мумів. Необхідно отримати незміщену оцінку  $\hat{\beta}$  коефіцієнтів  $\beta^*$  моделі:

$$\hat{y}(t) = f(x^*(t), \hat{\beta}, t), \quad (5.119)$$

для якої

$$\hat{\beta} \in G_{\hat{\beta}}, \quad \|y^*(t) - \hat{y}(t)\|^2 \leq \delta J(\delta\beta),$$

де  $\delta J(\delta\beta)$  — припустима похибка  $\delta J$ , що відповідає області невідзначеності  $\delta\beta$  оцінки  $\hat{\beta}$ .

Виміри проводять у дискретні моменти часу  $tk = k\Delta t$  (або просто  $k$ ), значення  $x^*(k)$  точне,  $y(k) = y^*(k) + \tilde{\varepsilon}(k) + \varepsilon^*(k)$ , початкові умови нульові. Алгоритм оцінювання  $\hat{\beta}$  для моделі (5.119) такий.

*Крок 1.* Задамо відображення  $f$  у виразі (5.119) таким чином:

$$f(x, \beta, t) = x,$$

це відповідає одиничній паралельній моделі.

Апроксимуємо вихідний сигнал об'єкта  $y(k)$ ,  $k = \overline{1, M}$  вихідним сигналом моделі (5.118), додаткової до одиничної на першому кроці моделі (5.119).

Як міру близькості  $y(k)$  і  $\hat{y}_1(k)$  приймемо, наприклад, середній за  $M$  дискретами квадрат похибки

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}_1(k), \quad (5.120)$$

де на цьому кроці

$$\hat{y}_1(k) = (\beta''')^T \varphi(x). \quad (5.121)$$

З умови мінімуму  $\sum_{k=1}^M \varepsilon^2(k)$  отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$A_1 \beta''' = B_1, \quad (5.122)$$

де



$$\mathcal{A}_1 = \Phi^\top \Phi, \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} \phi_1(1) & \phi_1(2) & \dots & \phi_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_r(1) & \phi_r(2) & \dots & \phi_r(M) \end{bmatrix},$$

$$(\beta''')T = [\beta_1''', \dots, \beta_r'''];$$

$$B_1 = \Phi^T y, y^T = (y(1), \dots, y(M)).$$

де  $\varphi_i(k)$  — скорочене позначення для  $\varphi_i(x(k))$ .

Із системи (5.122) знайдемо оцінку вектора  $\beta'''$ :

$$\beta''' = A_1^{-1} B_1. \quad (5.123)$$

Підставивши (5.123) в (5.121), отримаємо оцінку  $\hat{y}_1(k)$  першого наближення.

Крок 2. Розглядаючи оцінку  $\hat{y}_1(k)$  як згладжений сигнал  $y(k)$  об'єкта, поставимо відображенню (5.121) у відповідність паралельну модель із вектором  $\beta$ , параметри якого одержимо через вектори  $\beta'$ ,  $\beta''$  послідовно-паралельної моделі. Для цього з умови мінімуму середнього квадрата  $\sum_{k=1}^M \varepsilon_0^2(k)$  узагальненої помилки  $\varepsilon_0$  послідовно-паралельної моделі

$$\varepsilon_0 = f_1^T(x, \hat{y}, \beta' - f_2^T(x, \hat{y}_1, t)\beta''),$$

отримаємо систему нормальних рівнянь

$$A_2 \hat{\beta}^T = B_2, \quad (5.124)$$

де  $\hat{\beta}^T = (\beta'^T, \beta''^T)$ ;

$$A_2 = F^T F; F^T = \begin{bmatrix} F_1(1) & F_1(2) & \dots & F_1(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_p(1) & F_p(2) & \dots & F_p(M) \end{bmatrix}, p = n + m;$$

$$F_i(k) = \begin{cases} f_{1i}, i = \overline{1-m}, \\ f_{2,i-m}, i = \overline{m+1, n+m} \end{cases}.$$

Із виразу (5.124) визначимо оцінку  $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = A_2^{-1} B_2$$

і підставимо її в модель (5.119).

У результаті отримаємо оцінку  $\hat{y}_2$  сигналу  $y$  в другому наближенні і оцінку  $\hat{\beta}$  параметрів паралельної моделі в першому наближенні.

*Крок 3.* Повторення кроку 1, де як вхід для моделі (5.121) береться вихід  $\hat{y}_2(k)$  паралельної моделі, отриманої на кроці 2. На виході моделі отримаємо більш точну оцінку  $\hat{y}_3$  сигналу  $y$ .

*Крок 4.* Повторення кроку 2, але вже для більш точної апроксимації  $\hat{y}_3$ . Далі кроки повторюються до виконання умови зупинки, якою може бути величина  $\delta$  відносно зміни модуля норми вектора  $\hat{\beta}$  на  $(l+1)$ -му і  $(l)$ -му кроках:

$$\delta = \left| \frac{\|\hat{\beta}(l+1)\|}{\|\hat{\beta}(l)\|} - 1 \right|.$$

Оскільки для оцінювання  $\beta'''$  і  $\hat{\beta}$  використовувались лише квадратичні функціонали (тому, що  $\beta'''$  і  $\hat{\beta}^T = [\hat{\beta}^T, \hat{\beta}''^T]$  входять лінійно в  $\epsilon$  і  $\epsilon_0$  відповідно), то величина  $\delta$  монотонно зменшується в міру зростання  $l$ .

Якщо структура моделі достатня для опису відображення в об'єкті  $x^*$  в  $y^*$  об'єкті, то зі зростанням  $l$  додаткова модель вироджується в одиничну, а паралельна — з одиничної в модель об'єкта.

Швидкість збігання оцінок  $\hat{\beta}$  до  $\beta^*$  залежить від того, наскільки точно додаткова модель апроксимує сигнал  $y$  (особливо на кроці 1, коли входом для неї служить сигнал  $x$ ).

Для покращення апроксимаційних властивостей додаткову модель можна будувати за ноніусним принципом з адаптацією структури операторів; зручні також ортогональні моделі.

На рис. 5.33 зображено схему ідентифікації за методом трьох моделей. Система має три типи моделей і два блоки  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  і  $\beta(f, \varepsilon_0^1)$  оцінювання параметрів.

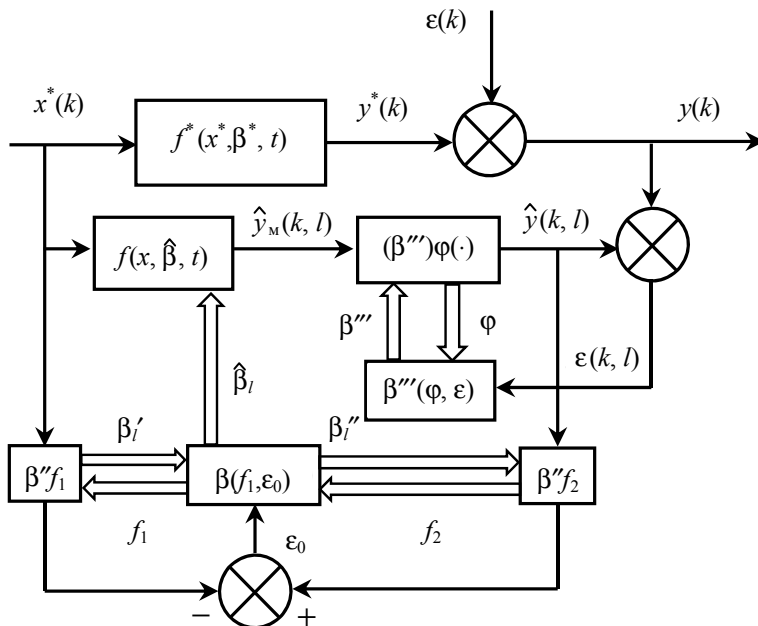


Рис. 5.33. Схема системи ідентифікації за методом трьох моделей

Окрім циклічного алгоритму уточнення параметрів можливим є рекурентний. При рекурентному алгоритмі блоки  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  і  $\hat{\beta}(f, \varepsilon_0)$  реалізують градієнтне налагодження параметрів, причому з умов стійкості алгоритм блока  $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$  повинен бути більш швидкодійним.

У надзвичайно простому випадку оператором  $\beta'''^T \varphi(\cdot)$  допоміжної моделі є скаляр  $\beta'''$ , що налагоджується за градієнтним алгоритмом:

$$d\Delta\beta''' / dt = -\lambda \text{grad } \varepsilon(t) \hat{y}_1(t) = -\lambda 2\varepsilon(t) \hat{y}_1(t),$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \hat{y}_1(t)\Delta\beta''',$$

або

$$d\Delta\beta'''/dt = -2\lambda[\hat{\varepsilon}(t)y_1(t) + \Delta\beta''' \hat{y}_1^2(t)].$$

Така допоміжна модель являє собою стохастичну систему з параметрично-зворотнім зв'язком

$$d\Delta\beta'''/dt + 2\lambda\hat{y}_1^2(t)\Delta\beta''' = -2\lambda\tilde{\varepsilon}(t)\hat{y}_1(t),$$

для якої за відповідної нестационарності  $\hat{\beta}(t)$  і перешкоди  $\tilde{\varepsilon}(t)$  існує оптимальне значення  $\lambda$ , коли середній квадрат  $\bar{\varepsilon}^2$  похибки (5.120) є мінімальним і близьким до  $\tilde{\varepsilon}^2$ , тобто до квадрата перешкоди.

Додаткова модель безперервно доповнює вихід  $\hat{y}(k)$  паралельної моделі до істинного виходу  $y^*(k)$  об'єкта.

Тоді на послідовно-паралельній моделі за сигналами  $x(k)$  і  $\hat{y}(k) = y^*(k)$  буде одержано значення вектора  $\hat{\beta}$ , близьке до істинного  $\beta^*$ .

Найпростіша допоміжна модель може застосовуватися лише для уточнення вектора  $\hat{\beta}$  в паралельній моделі.

При ідентифікації стаціонарних систем для  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливою є рівність  $\hat{y}(k) = y(k)$ , тобто послідовно-паралельна модель виходить ніби підключеною до об'єкта і оцінка  $\hat{\beta}$  буде зміщеною. Якщо в міру налагодження паралельної моделі значення  $\lambda$  зменшувати, то оцінка  $\hat{\beta}$  прямує до  $\beta^*$ .

Метод дозволяє одержати асимптотично не зміщені оцінки  $\hat{\beta}$  невідомого вектора  $\beta^*$ , який нелінійно входить в оператор  $f(x, \hat{\beta}, t)$  паралельної моделі.

**Приклад 1.** ЕТО з чистим запізненням подано моделлю

$$y^*(t) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i p^i\right)} x(t), \quad x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (p = d/dt, \alpha_i = \tau^i / i!).$$

Необхідно за  $y(t) = y^*(t) + \tilde{\varepsilon}(t)$ ,  $\tilde{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a\delta(t-t_j)$ , де  $\delta$  — функція Дірака;  $t_j$  — випадкові значення із середнім періодом  $T_{\text{сер}}$  (тобто  $M(t_j - t_{j-1}) = T_{\text{сер}}$ ) і  $x(t)$  оцінити нелінійно вхідний у рівняння об'єкта параметр  $\tau$ , користуючись не трьома, а двома моделями.

Оскільки ЕТО — це ланка з чистим запізненням  $\tau$ , то для синусоїдного сигналу  $x(t)$  область унімодальності середнього квадрата помилки  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}_1(t)$ , як функції  $\Delta\tau$ , буде обмежена величиною  $\pm \max \Delta\tau = \pm \pi/\omega$ ,  $\Delta\tau = \hat{\tau} - \tau$ .

Якщо скористатися методом двох моделей, тобто безпосередньо до об'єкта застосувати послідовно-паралельну модель із послідовним  $f_1 = W_1(p)$  і паралельним  $f_2 = W_2(p)$  операторами відповідно:

$$W_1(p) = \frac{1 + \sum_{i=1}^n \hat{a}_1 p^i}{1 + Tp}; \quad W_2(p) = \frac{1}{1 + Tp},$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= W_2(p)[y^*(t) + \hat{\varepsilon}(t)] - \\ &- W_1(p)x(t) \approx \Delta\tau \frac{p}{Tp+1} x(t + \Delta\tau) + \hat{\varepsilon}(t + \hat{\tau})/Tp + 1. \end{aligned}$$

Тоді математичне сподівання  $M\{\cdot\}$  оцінки  $\hat{\tau}$ , що відповідає умові

$$M \frac{\delta \bar{\varepsilon}_0^2}{\delta \hat{\tau}} = M \left\{ \varepsilon_0(t) \frac{\partial \varepsilon_0(t)}{\partial \hat{\tau}} \right\} = \Delta\tau \frac{\omega^2}{T^2 \omega^2 + 1} \frac{x_0^2}{2} - \frac{a_{\text{ш}}^2}{2T^2 T_{\text{сер}}} = 0,$$

буде зміщено на величину для  $\omega T > 1$ , яка дорівнює відношенню перешкода — сигнал:

$$\Delta\tau = \frac{a_{\text{ш}}^2}{T_{\text{сер}} x_0^2} \frac{T\omega^2 + 1}{T^2 \omega^2} \approx \frac{a_{\text{ш}}^2}{T_{\text{сер}}} / x_0^2,$$

де  $T$  — стала часу фільтра.

Якщо  $|\Delta\tau| > \frac{\pi}{\omega}$ , то оцінка  $\hat{\tau}$  за паралельною моделлю з початковим значенням  $\hat{\tau}(0)$ , яке взяте з послідовно-паралельної, не зійдеться до  $\tau$ , а призведе до одного з хибних значень  $\tau \pm \frac{2\pi}{\omega}k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тобто, як бачимо застосування методу двох моделей не дає бажаного результату.

**Приклад 2.** За вхідним сигналом  $u(t)$  ЕТО, який становить собою одиничний східець і вихідним сигналом  $x(t)$  потрібно визначити три коефіцієнти  $\hat{\beta}_i (i = \overline{1,3})$  диференціального рівняння моделі об'єкта, наприклад моделі розгінної характеристики електродвигуна:

$$\ddot{x}^*(t) + \hat{\beta}_2 \dot{x}^*(t) + \hat{\beta}_1 x^*(t) = \hat{\beta}_3 U(t),$$

де  $x(t)$  — кутова швидкість;  $U(t)$  — напруга.

Сигнали  $U(t)$  і  $x^*(t)$  виміряні в дискретні моменти часу  $k$  із кроком  $\Delta t = 0,05$  с.

Вимірювання  $x(k)$  ( $k = \overline{1,100}$  сигналу  $x^*(k)$ ) зашумлено адаптивною перешкодою  $N(k)$  типу гаусівського білого шуму з нульовим середнім значенням.

Задачу розв'язуватимемо методом послідовно-паралельної моделі та методом трьох моделей.

Фільтри послідовно-паралельної моделі задамо оператором  $W_\Phi(p) = 1/(p^3 + 5p^2 + 6p + 7)$ , який значною мірою згладжує перешкоду  $N(t)$ .

Однак за великих рівнів шуму оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  суттєво занижені, оцінка  $\hat{\beta}_3$  для обох методів близька до істинної, оскільки сигнал  $u(t)$  вимірюється точно (рис. 5.34).

Деяке відхилення її від точного значення викликане лише не ортогональністю матриці МНК.

На рис. 5.34 і в табл. 5.4 наведено залежність значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  за методом послідовно-паралельної моделі (ППМ) (штрихові лінії) і за методом трьох моделей (МТМ) (суцільні лінії) від відношення середньоквадратичних значень шуму  $N(k)$  і сигналу  $x^*(k)$  (шум/сигнал).

Як бачимо, в МТМ шум в  $y(t)$  не призводить до зміщення оцінок, вони гарантовано сходяться за дві ітерації, тоді як у методі ППМ оцінки  $\hat{\beta}_1$  і  $\hat{\beta}_2$  зі зростанням відношення шум/сигнал суттєво зменшуються.

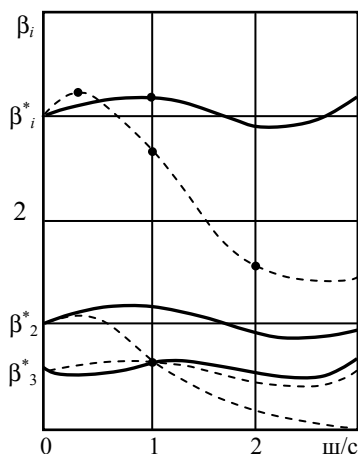


Рис. 5.34. Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі: трьох моделей від відношення шум/сигнал

Таблиця 5.4

**Залежність значень оцінок  $\hat{\beta}_i$  від відношення шум/сигнал для методу послідовно-паралельної моделі та методу трьох моделей**

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_3$	
Шум/сигнал	ППМ	МТМ	ППМ	МТМ	ППМ	МТМ
0	3	3	1	1	0,5	0,5
0,1	3,06	3,05	1,03	1,02	0,504	0,504
0,2	3,11	3,08	1,04	1,03	0,508	0,507
0,5	3,15	3,10	1,01	1,1	0,517	0,516
1	2,69	3,15	0,71	1,14	0,6	0,52
2	1,56	2,82	0,16	0,96	0,49	0,48
3	1,39	3,22	0,02	0,95	0,53	0,58

## 5.6. Комплексування методів і моделей в БАСІ-системах

Стійкість динамічних ЕТС є однією з найбільш важливих характеристик, особливо якщо вони нестационарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. До таких систем належить мобільні ЕТС, наприклад, БЛА, зокрема його стійкість у поздовжньому короткоперіодичному русі. Для малих відхилень змінних від режиму балансування (постійна висота, швидкість руху у вертикальній площині) цей рух описується щодо змінних (кута атаки, кутової швидкості і руля висоти) системою рівнянь першого порядку [13]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u, \\ \dot{x}_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u \end{cases}, \quad (5.126)$$

де  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  — похідні за часом від  $x_1$  і  $x_2$ ;  $\beta_{ij}$ , ( $i=1,2; j=1,2,3$ ) — аеродинамічні коефіцієнти.

Системі (5.126) еквівалентні передатні функції, що відображають вхідний сигнал  $u$  у виходи  $x_{1M}$  або  $x_{2M}$ , наприклад  $u$  в  $x_{2M}$ :

$$W_u^{x_2}(p) = \frac{\beta_{23}p - (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})}{p^2 - (\beta_{11} + \beta_{22})p + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})}. \quad (5.127)$$

Коефіцієнти  $(\beta_{11} + \beta_{22}) = -a_1$  і  $(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}) = a_0$  знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості. Помноживши ці коефіцієнти на  $J_{z_1}/qSb_a\beta_{11}$ , (де  $J_{z_1}$  — момент інерції;  $q$  — швидкісний напір;  $S$  — площа крила,  $b_a$  — середня аеродинамічна хорда крила), отримаємо відповідний запас стійкості в частках від  $b_a$ .

Коефіцієнти  $\beta_{13}, \beta_{23}$  визначають ефективність руля висоти;  $\beta_{12}, \beta_{22}$  — демпфірувальні сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів  $\beta_{ij}$  БЛА, за якими визначається стійкість і керованість, є актуальним завданням льотних випробувань (ЛВ).

Обмежені вартістю натурного експерименту і нестационарністю часу експерименту, нелінійністю — діапазон зміни змінних, не



дозволяють з досить високою точністю одержати оцінки  $\hat{\beta}_{ij}\beta_{ij}$  із зашумлених перешкодами вимірювань  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{u}$ .

Тому практика ЛВ обмежується досить наближеними оцінками стійкості і керованості БЛА [2].

Підвищити точність оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) без збільшення часу ЛВ можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апіорну інформацію про рознесені спектри сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), достатньо для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різницю відфільтрованого і вихідного сигналу, отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі слід визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати  $m$  статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної  $x_i$ ,  $u$ .

Склавши ці реалізації з відповідними відфільтрованими сигналами, отримаємо  $m$  псевдо-вибірок даних ЛВ. Маючи в наявності  $m$  статистично ідентичних вибірок,  $p$  методів ідентифікації і  $q$  моделей БЛА, можна скористатися їх надмірністю для одержання більш точних оцінок АДК.

Щодо задачі з визначення АДК БЛА в поздовжньому коротко-періодичному русі, розглянемо три моделі: (5.126), (5.127) і модель (5.128), що впливає з двох перших:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= (\beta_{11} + \beta_{22})\dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23}\dot{u} - \\ &- (\beta_{23}\beta_{11} - \beta_{13}\beta_{22})u = -a_1\dot{x}_2 - a_0x_2 + a_2\dot{u} + a_3u. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Кількість  $p$  методів визначення АДК визначається кількістю функціоналів близькості змінних БЛА і його моделей (5.129), (5.130), (5.131). З умови мінімуму цих функціоналів визначаються оптимальні оцінки  $\hat{\beta}$  АДК:

$$\{\beta_{ij}^*\} = \arg \min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{x}_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}\hat{x}_j - \beta_{i3}\hat{U} \right\|^2, \quad (5.129)$$

де  $i=1,2$ ;  $j=1,2$ ;  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{x}_j$ ,  $\hat{U}$  — згладжені фільтром змінні.

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \|x_2 - x_{2M}\|^2, \quad (5.130)$$

$$\{a_i^*\} = \arg \min_{a_i} \left\| \hat{x}_2 + a_1 \hat{x}_2 + a_0 \hat{x}_2 - a_2 \hat{U} - a_3 U \right\|^2. \quad (5.131)$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим самим фільтром, щоб не внести методичної помилки в лінійні рівняння БЛА.

Далі для кожного з алгоритмів (5.129)–(5.131) на множині із  $m$  реалізацій для кожної реалізації визначаються оптимальні значення  $\{\beta_{ij}^*\}$ ,  $\{a_i^*\}$ , їх середні значення за  $m$  реалізаціями  $\{\bar{\beta}_{ij}^*\}$ ,  $\{\bar{a}_i^*\}$ , оцінки власних  $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)}^2$ , і взаємних  $\hat{\sigma}_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}^2$ ,  $\hat{\sigma}_{a_i^*(k)a_i^*(l)}^2$  дисперсій, де  $k=1,2,3$ ;  $p=3$ ;  $l=1,2,3$ ;  $k \neq l$ .

Для стислості запису елементи множин  $\{\beta_{ij}^*\}$ ,  $\{a_i^*\}$  позначимо через  $\{\alpha_i\}$ . Тоді шукатимемо найкращу на множині з трьох методів-моделей оцінку  $\alpha_i^*$  у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^3 C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^3 C_k = 1. \quad (5.132)$$

Коефіцієнти  $C_k$  визначимо з умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2}{\partial C_k} = 0, \quad k=2,3, \quad (5.133)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_i^*}^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^3 C_k (\alpha_i(k,j) - \bar{\alpha}_i(k,j)) \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^3 C_k^2 \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 C_k C_l \hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = C^T A C. \end{aligned}$$

Для стислості позначимо  $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)}^2 = \hat{\sigma}_k^2$ ,  $\hat{\sigma}_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)}^2 = \hat{\sigma}_{kl}^2$ , тоді  $C^T = [C_2, C_3]$ ,

$$A = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) \\ (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2) & (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\hat{\sigma}_{13}^2) \end{bmatrix}.$$

Тепер умова  $AC = B$  (5.133) еквівалентна системі:

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \quad (5.134)$$

Розв'язок  $C = A^{-1}B$  системи (5.134) існує, якщо матриця  $A$  позитивно визначена. Що менше корельовані похибки в оцінюванні  $\alpha_i$  різними методами, то ближче матриця  $A$  до діагональної. Оскільки норми близькості (5.129)–(5.131) взяті в просторі змінних  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , то можна чекати слабку кореляцію в похибках оцінок  $\alpha_i$  різними методами — моделями (5.129)–(5.131).

Підставивши знайдені з системи (5.134) оптимальні значення  $C_2$ ,  $C_3$ , а також  $C_1 = 1 - C_2 - C_3$  в рівняння (5.132), отримаємо оптимально зважену оцінку  $\alpha_i^*$  коефіцієнта  $\alpha_i$  (за умови гарної обумовленості матриці  $A$  і невеликої похибки оцінок  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $\hat{\sigma}_{ij}^2$ , дисперсій  $\sigma_i^2, \sigma_{ij}^2$ ).

В іншому випадку для гарантії не погіршення результату для зважування оцінок  $\alpha_i$  слід скористатися мінімаксним підходом. Оцінки  $\hat{\sigma}_i^2$ ,  $\hat{\sigma}_{ij}^2$ , обчислені за  $m$  згенерованими вибірками даних, мають похибки з  $\chi^2$ -розподілом, якщо похибки оцінок  $\alpha_i(k)$  розподілені за нормальним законом.

Істинні значення  $\sigma_i^2$ ,  $\sigma_{ij}^2$  для заданого рівня достовірності знаходяться в інтервалі  $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$ ,  $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_{ij}^2$ , або приблизно  $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_i^2$ ,  $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_{ij}^2$ , де  $\gamma$  — квантиль  $\chi^2(p, m)$ -розподілу,  $\gamma \ll 1$

Нехай  $\sigma_i^2 = \hat{\sigma}_i^2(1 + \gamma)$ , для  $i \in I = \{\overline{1, n_1}\}$ ,  $\sigma_j^2 = \hat{\sigma}_j^2(1 - \gamma)$ , для  $j \in J = \{\overline{n_1 + 1, n}\}$ . Тоді  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 + \gamma)$ , для  $i, j \in I$ ;  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2(1 - \gamma)$ ,

для  $i, j \in J$ ;  $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}$ , для  $i \in I, j \in J$  або  $i \in J, j \in I$ . Оцінка дисперсії зваженої оцінки  $\alpha_r^*$   $r$ -го АДК:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2 = & \sum_{i \in I} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1+\gamma) + \sum_{j \in J} C_j^2 \hat{\sigma}_j^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1+\gamma) + \\ & + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)} + \sum_{\substack{i \in J \\ j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}. \end{aligned} \quad (5.135)$$

Вираз (5.135) береться  $L$  разів для всіх можливих комбінацій  $\hat{\sigma}_{ij}^2 (1 \pm \gamma)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Для кожного  $j$ -го поєднання з умови (5.133) отримуємо систему, аналогічну (5.134), розв'язуючи яку, знаходимо оптимальний  $\xi$ -й вектор  $C^*(\xi)$ :

$$C^*(\xi) = [C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi)]^T, \quad \xi = \overline{1, L} \quad (5.136)$$

і обчислюємо  $\sigma_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi))$ ,  $\xi = \overline{1, L}$ ;  $S = \overline{1, L}$ .

Мінімаксна оцінка  $C^*$  визначається із умови

$$C^* = \arg \min_{\xi \in \{1, L\}} \max_{S \in \{1, L\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2(S, C^*(\xi)).$$

Тобто кожен вектор (5.136) підставляють у кожний варіант дисперсії (5.135) і за  $C^*$  приймається той, найбільше значення якого за всіх варіантів (5.135) мінімальне серед найбільших значень інших векторів (5.136).

**Приклад.** Для наочності розглянемо двовимірний випадок ( $p = 2$ ).

Нехай  $\sigma_1^2 = 1$ ,  $\sigma_2^2 = 9$ ,  $\sigma_{12}^2 = 2,8$ ,  $\gamma = 0,1$ . Можливі поєднання наведено в табл. 5.5.

Оцінка (5.132):

$$\alpha_i^* = C\alpha_i(1) + (1-C)\alpha_i(2).$$

Таблиця 5.5

**Множники можливих відхилень оцінок дисперсій**

Номер варіанта	Множники для		
	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_{12}^2$
1	$1 + \gamma$	$1 + \gamma$	$1 + \gamma$
2	$1 - \gamma$	$1 - \gamma$	$1 - \gamma$
3	$1 + \gamma$	$1 - \gamma$	$\sqrt{(1 - \gamma^2)}$
4	$1 - \gamma$	$1 + \gamma$	$\sqrt{(1 - \gamma^2)}$

Дисперсія (5.135):

$$\sigma_{\alpha_r}^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2)C^2 + 2(\sigma_{12}^2 - \sigma_1^2)C + \sigma_2^2. \quad (5.137)$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки з табл. 5.5 і виконавши операції (5.133), (5.134), отримаємо набір (5.136) для чотирьох варіантів (5.137):

$$C^*(1) = C^*(2) = \frac{\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2} = 1,41;$$

$$C^*(3) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1 - \gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1 + \gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1 - \gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}} = 1,465;$$

$$C^*(4) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(1 + \gamma) - \hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1 - \gamma) + \hat{\sigma}_2^2(1 + \gamma) - 2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1 - \gamma^2}} = 1,361.$$

Значення  $\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$  зведено в табл. 5.6.

У табл. 5.6 жирною рамкою виділено варіанти з  $\max \sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$ , подвійною рамкою — з  $\min_{\xi \in \{1,4\}, S \in \{1,4\}} \max_{\alpha_r} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(3, C^*(3)) = 0,316$ , із її аргументом  $C^* = 1,465$ ,  $(1 - C^*) = -0,465$ .

Таблиця 5.6

## Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$				
$S \backslash \xi$	1	2	3	4
1	0,290	0,290	0,304	0,300
2	0,236	0,236	0,249	0,245
3	0,327	0,327	0,316	0,354
4	0,232	0,232	0,275	0,218

Якщо взяти  $\sigma_1^2 = 1$ ;  $\sigma_2^2 = 9$ ;  $\sigma_{12}^2 = 2,8$ ;  $\gamma = 0,1$ , то  
 $C^*(1) = C^*(2) = 0,756$ ;  $C^*(3) = 0,737$ ;  $C^*(4) = 0,737$ .

До табл. 5.6 подібна табл. 5.7

Таблиця 5.7

## Оптимальні значення дисперсій

$\sigma_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi))$				
$S \backslash \xi$	1	2	3	4
1	0,081	0,081	0,089	0,087
2	0,067	0,067	0,073	0,071
3	0,082	0,082	0,078	0,099
4	0,076	0,076	0,094	0,070

Відповідно  $\min_{\xi \in \{1,4\}} \max_{S \in \{1,4\}} \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = \hat{\sigma}_{\alpha_r}^2(S, C^*(\xi)) = 0,082$ ,  $C^* = 0,756$ ,  
 $(1 - C^*) = 0,244$ .

Якщо припустити, що  $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ , то для різних значень коефіцієнта кореляції  $r_{12} = \frac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}$  та співвідношення  $F_{12} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  одержимо сім'ю графіків  $C^*(r_{12}, F)$  (рис. 5.35).

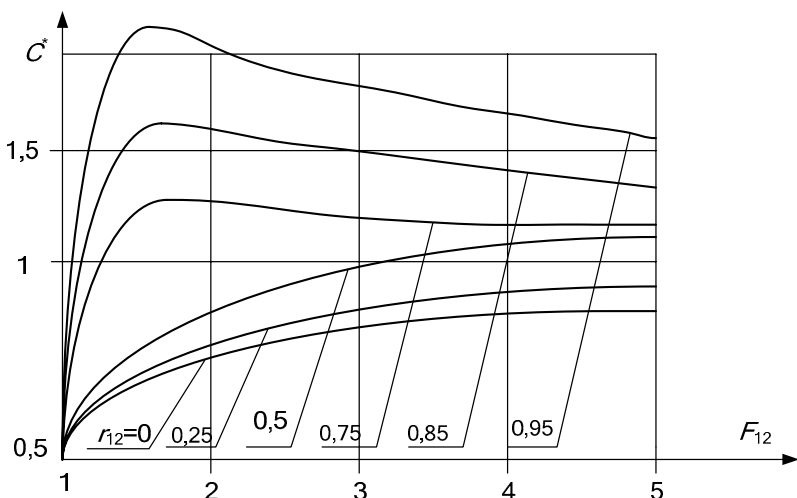


Рис. 5.35. Залежність оптимальної ваги  $C^*$  від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

Для  $F_{12} = 1$ ,  $C^* = 0,5$  для будь-яких  $r_{12}$ ; при  $F_{12} \rightarrow \infty$ ,  $C^* \rightarrow 1$ ,  $(1 - C^*) \rightarrow 0$ , тобто неефективний метод виключається. Характерно, що для однакових  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ ,  $|\sigma_{12}^2|$  величина  $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2$  залежить від знаку  $\sigma_{12}^2$  (0,316 для позитивної і 0,082 — для негативної).

Тобто зважування двох методів із негативною  $\sigma_{12}^2$  дає кращий результат.

У даному прикладі для  $\sigma_{12}^2 = 0$  дисперсія  $\hat{\sigma}_{\alpha_r}^2 = 0,9$ . Це набагато більше мінімаксних значень дисперсій при  $\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$  (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксної оцінки.

Таким чином, використовуючи в БАСІ кілька моделей об'єкта ідентифікації і кілька методів їх параметричного оцінювання спільно з технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів АДК БЛА без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань. Тим більше, що з огляду на нестационарність об'єкта ідентифікації, вибірки не можуть бути як завгодно великими.

### Список літератури до розділу 5

1. Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики / К. Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц. — К. : Академперіодика, 2002. — 480 с.
2. Кринецкий Л. И. Лётные испытания систем управления ракетами / Л. И. Кринецкий. — М. : Машиностроение, 1980. — 400 с.
3. Патент на корисну модель №78541 України. МПК G01R 31/02. Спосіб вимірювання параметрів лінеаризованої моделі відносно базового режиму моделі нелінійної динаміки електротехнічних об'єктів / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, К. В. Уманська, М. М. Гонтар, заявник та власник патенту НТУУ «КПІ». — Заявл. 22.08.2012, опубл. 25.03.2013. Бюл. № 6/2013.
4. Пухов Г. Е. Модели технологических процессов / Г. Е. Пухов, Ц. Хатиашвили. — К. : Техніка, 1974. — 200 с.
5. Сильвестров А. Н. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.
6. Сільвестров А. М. Забезпечення інваріантності напруги до струму якоря в генераторі постійного струму / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // тези 68-ї наукової конференції. — 2016. — Т. 1. — С. 19–21.
7. Сільвестров А. М. Ідентифікація нелінійних статичних залежностей з динаміки електротехнічних систем / Д. К. Зіменков, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // «Системні дослідження та інформаційні технології». — 2016. — №1. — С. 99–106.
8. Сільвестров А. М. Виявлення закономірності у вібраціях об'єкта для діагностики та прогнозування його стану / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул, К. В. Уманська // «Комп-



рессорное и энергетическое машиностроение». — 2014. — №1(35). — С. 16–20.

9. Сільвестров А. М. Застосування теорії фільтрів для аналітичного опису логіко-аналітичних залежностей / Г. І. Кривобока, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2013. — № 2. — С. 64–69.

10. Сільвестров А. М. Структурно-параметрична ідентифікація статичної нелінійності динамічного об'єкта / А. М. Сільвестров, О. М. Скринник, Л. Ю. Спінул // Адаптивні системи автоматичного управління НТУУ «КПІ». — 2014. — № 1(24). — С. 105–112.

11. Сільвестров А. М. Применение метода аналитического описания кусочно-аналитических зависимостей / К. М. Божко, А. М. Сільвестров, О. М. Скринник // Bulgarian Journal for Engineering Design. — 2014. — issue 22. — Page 33–38.

12. Сільвестров А. М. О некоторых методах идентификации нелинейных объектов / А. М. Сільвестров, В. В. Самсонов // An International jornal «Mathematics and Computer Science», Journal of Qafqaz University. — 2011. — № 32. — С. 12–23

13. Сільвестров А. М. Нариси з теорії ідентифікації / В. В. Самсонов, А. М. Сільвестров // — К.: НУХТ, — 2012. — 222 с.

14. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1984. — 380 с.

Таблиця значень  $t_{\gamma,k}$ , що задовольняють рівність  $p(t) = 2 \int_0^t f(x) dt = \gamma$

$k =$ $=n-m-1$	$p(t) = \gamma$													
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999	
1	0,158	0,325	0,51	0,727	1	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,25	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941	
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,19	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,61	
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,92	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859	
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,13	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405	
8	0,13	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,86	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,1	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,781	
10	0,129	0,26	0,397	0,542	0,7	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,129	0,26	0,396	0,54	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487	
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,87	1,079	1,35	1,771	2,16	2,65	3,012	4,221	
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,14	
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	

$k =$ $= n-m-1$	$p(t) = \gamma$												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,69	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,74	2,11	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,33	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,86	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,85
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,53	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,75	3,646
40		0,255		0,529	0,681	0,851		1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	
60		0,254		0,527	0,679	0,848		1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	
100		0,254		0,526	0,677	0,845		1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	
200		0,254		0,525	0,676	0,843		1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	
$\infty$		0,253		0,524	0,675	0,842		1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	

Таблиця значень  $t_{\alpha, k}$ , що задовольняють рівність  $1 - p(t) = 2 \int_0^t f(x) dx = 2 \frac{\alpha}{2} = \alpha$ 

$k =$ $=n-m-1$	$p(t)$												
	$\alpha=0,9$ $a/2=0,45$	$\alpha=0,8$ $a/2=0,4$	$\alpha=0,7$ $a/2=0,35$	$\alpha=0,6$ $a/2=0,3$	$\alpha=0,5$ $a/2=0,25$	$\alpha=0,4$ $a/2=0,2$	$\alpha=0,3$ $a/2=0,15$	$\alpha=0,2$ $a/2=0,1$	$\alpha=0,1$ $a/2=0,05$	$\alpha=0,05$ $a/2=0,025$	$\alpha=0,02$ $a/2=0,01$	$\alpha=0,01$ $a/2=0,005$	$\alpha=0,001$ $a/2=0,0005$
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	63,662
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,401	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,086	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,127	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,872	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819

Закінчення табл. додатка 2

$k =$ $=n-m-1$	$p(t)$												
	$\alpha=0,9$ $a/2=0,45$	$\alpha=0,8$ $a/2=0,4$	$\alpha=0,7$ $a/2=0,35$	$\alpha=0,6$ $a/2=0,3$	$\alpha=0,5$ $a/2=0,25$	$\alpha=0,4$ $a/2=0,2$	$\alpha=0,3$ $a/2=0,15$	$\alpha=0,2$ $a/2=0,1$	$\alpha=0,1$ $a/2=0,05$	$\alpha=0,05$ $a/2=0,025$	$\alpha=0,02$ $a/2=0,01$	$\alpha=0,01$ $a/2=0,005$	$\alpha=0,001$ $a/2=0,0005$
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40		0,255		0,529	0,681	0,851		1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	
60		0,254		0,527	0,679	0,848		1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	
100		0,254		0,526	0,677	0,845		1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	
200		0,254		0,525	0,676	0,843		1,286	1,652	1,972	2,345	2,601	
$\infty$		0,253		0,524	0,675	0,842		1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	

Критичні точки розподілу Фішера ( $F$ -розподілу)

$k_2$	$k_1$																	$\infty$	
$\alpha = 0, 1$																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$	
1	3986	4950	5359	5583	5724	5820	5891	5944	5986	6019	6071	6122	6174	6200	6226	6253	6279	6306	6333
2	853	900	916	924	929	933	935	937	938	939	941	942	944	945	946	947	947	948	949
3	554	546	539	534	531	528	527	525	524	523	522	520	518	518	517	516	515	514	513
4	454	432	419	411	405	401	398	395	394	392	390	387	384	383	382	380	379	378	376
5	406	378	362	352	345	340	337	334	332	330	327	324	321	319	317	316	314	312	310
6	378	346	329	318	311	305	301	298	296	294	290	287	284	282	280	278	276	274	272
7	359	326	307	296	288	283	278	275	272	270	267	263	259	258	256	254	251	249	247
8	346	311	292	281	273	267	262	259	256	254	250	246	242	240	238	236	234	232	229
9	336	301	281	269	261	255	251	247	244	242	238	234	230	228	225	223	221	218	216
10	329	292	273	261	252	246	241	238	235	232	228	224	220	218	216	213	211	208	206
11	323	286	266	254	245	239	234	230	227	225	221	217	212	210	208	205	203	200	197
12	318	281	261	248	239	233	228	224	221	219	215	210	206	204	201	199	196	193	190
13	314	276	256	243	235	228	223	220	216	214	210	205	201	198	196	193	190	188	185
14	310	273	252	239	231	224	219	215	212	210	205	201	196	194	191	189	186	183	180
15	307	270	249	236	227	221	216	212	209	206	202	197	192	190	187	185	182	179	176
16	305	267	246	233	224	218	213	209	206	203	199	194	189	187	184	181	178	175	172
17	303	264	244	231	222	215	210	206	203	200	196	191	186	184	181	178	175	172	169
18	301	262	242	229	220	213	208	204	200	198	193	189	184	181	178	175	172	169	166
19	299	261	240	227	218	211	206	202	198	196	191	186	181	179	176	173	170	167	163
20	297	259	238	225	216	209	204	200	196	194	189	184	179	177	174	171	168	164	161
21	296	257	236	223	214	208	202	198	195	192	187	183	178	175	172	169	166	162	159
22	295	256	235	222	213	206	201	197	193	190	186	181	176	173	170	167	164	160	157
24	293	254	233	219	210	204	198	194	191	188	183	178	173	170	167	164	161	157	153
25	292	253	232	218	209	202	197	193	189	187	182	177	172	169	166	163	159	156	152
26	291	252	231	217	208	201	196	192	188	186	181	176	171	168	165	161	158	154	150
28	289	250	229	216	206	200	194	190	187	184	179	174	169	166	163	159	156	152	148
30	288	249	228	214	205	198	193	188	185	182	177	172	167	164	161	157	154	150	146
40	284	244	223	209	200	193	187	183	179	176	171	166	161	157	154	151	147	142	138
60	279	239	218	204	195	187	182	177	174	171	166	160	154	151	148	144	140	135	129
120	275	235	213	199	190	182	177	172	168	165	160	155	148	145	141	137	132	126	119

$k_1$																			
$k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	60	$\infty$
$\alpha = 0,05$																			
1	161,4	199,5	15,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,41	2,34	2,30	2,26	2,22	2,17	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35

# ЗМІСТ

Вступ .....	3
<b>Розділ 1. ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ</b> .....	11
1.1. Визначення системи .....	11
1.2. Багаторівнева декомпозиція систем ідентифікації ЕТО .....	20
1.3. Принцип узгодженості критеріїв якості підсистем складного ЕТО .....	31
1.4. Композиція підсистем різних рівнів ЕТО в єдину систему.....	36
1.5. Приклад побудови проекторів $PR_1$ , $PR_3$ в БАСІ.....	40
1.5.1. Алгоритми роботи проекторів $Opt_q \rightarrow Opt_{qk}$ в БАСІ .....	40
1.5.2. Методика оцінювання кількісних характеристик метода ідентифікації .....	42
1.5.3. Вибір найкращого з множини $\{Opt_{qk}\}$ методу ідентифікації для реальної ситуації.....	46
1.6. Енергетичний підхід до побудови параметричних моделей ЕТО .....	48
1.7. Системний підхід до процесу самостійного навчання на електронному тренажері.....	51
1.7.1. Вступ .....	51
1.7.2. Опис елементів системи автоматичного керування процесом навчання .....	53
1.7.3. Числове моделювання процесу навчання на електронному тренажері .....	56
<i>Список літератури до розділу 1</i> .....	62
<b>Розділ 2. МОЖЛИВОСТІ І ОБМЕЖЕННЯ СТАТИСТИЧНО ОПТИМАЛЬНИХ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕТО</b> .....	66
2.1. Ідентифікація статичних характеристик в ЕТО методом найменших квадратів.....	66
2.1.1 Регресійні моделі ЕТО та їх ідентифікація.....	66
2.1.2. Оцінювання вектора $\beta$ за методом найменших квадратів (МНК).....	69
2.1.3. Числові характеристики МНК-оцінки $\beta^*$ .....	70
2.1.4. Числові характеристики рівняння регресії .....	73
2.1.5. Довірчі інтервали моделі статистики ЕТО та її параметрів $\beta_i$ .....	78
2.1.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії .....	79
2.1.7. Перевірка загальної якості моделі ЕТО .....	81



2.1.8. Визначення моделі статичного генератора постійного струму .....	83
2.1.9. Побудова нелінійних динамічних моделей резистивних елементів ЕТК .....	87
2.2. Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів ЕТО .....	104
2.3. Рекурентні методи ідентифікації дискретних моделей ЕТО.....	118
2.3.1. Ідентифікація дискретних моделей динаміки ЕТО методом найменших квадратів .....	118
2.3.2. Ідентифікація методом допоміжних змінних .....	121
2.3.3. Ідентифікація дискретних моделей динаміки ЕТО методом максимальної правдоподібності .....	123
2.3.4. Ідентифікація дискретних моделей методом стохастичної апроксимації .....	126
2.3.5. Порівняння характеристик рекурентних методів ідентифікації динаміки ЕТО.....	128
2.4. Підвищення інформативності даних.....	135
2.4.1. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах пасивного експерименту на ЕТО .....	135
2.4.2. Покращення збіжності процесу оптимізації не строго випуклих функціоналів .....	140
2.4.3. Підвищення інформативності вибірок даних в умовах активного експерименту на ЕТО .....	146
2.4.3.1. Теоретичне обґрунтування доцільності покоординатної квазідіагоналізації.....	146
2.4.3.2. Синтез тестуючих вхідних впливів на досліджуваній ЕТО .....	151
<i>Список літератури до розділу 2 .....</i>	<i>159</i>

### **Розділ 3. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ЕТО ЗА НЕТОЧНИМИ ВИМІРАМИ ВХІДНИХ І ВИХІДНИХ СИГНАЛІВ .....**

3.1. Метод найменших квадратів в ситуації зашумленості вимірів вихідних і вхідних сигналів ЕТО .....	160
3.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація.....	164
3.3. Інтегрований МНК в задачі ідентифікації ЕТО .....	166
3.3.1. Загальні положення.....	166
3.3.2. Аналіз складових методу .....	168
3.3.3. Кількісні показники оцінки .....	173
3.3.4. Рекурентна форма обчислення.....	176

3.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК .....	177
3.3.6. Тестування ІМНК.....	179
3.4. Метод адаптивного одноразового ділення (МОД) в задачі оцінювання параметрів моделі ЕТО .....	186
3.4.1. Сутність методу .....	186
3.4.2. Зміщення оцінок.....	187
3.5. Метод прогнозу кореляцій .....	189
<i>Список літератури до розділу 3.....</i>	<i>191</i>
<b>Розділ 4. ЦІЛЕОРІЄНТАЦІЯ ПІДСИСТЕМ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НА ГОЛОВНИЙ ПОКАЗНИК ЯКОСТІ ЕТК .....</b>	
4.1. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в задачах прогнозу електроенергетичних показників ЕТК .....	192
4.2. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в задачах оптимального керування ЕТО .....	207
4.2.1. Узгодженість показників якості ЕТК підсистем різного рівня .....	207
4.2.2. Ідентифікація і оптимізація параметрів ЕТК на прикладі технологічного процесу виробництва кварцової трубки .....	213
4.3. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в задачах діагностики аеродинаміки безпілотного літального апарату (БЛА) .....	222
4.3.1. Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального керування льотними випробуваннями БЛА на стійкість і керованість .....	223
4.3.2. Математичні моделі збуреного руху БЛА та їх декомпозиція.....	225
4.3.3. Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі бічного руху БЛА.....	228
4.3.4. Корекція критеріїв якості експерименту .....	230
4.3.5. Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бічного руху БЛА.....	232
<i>Список література до розділу 4.....</i>	<i>235</i>
<b>Розділ 5. НОВІ МЕТОДИ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ЕТО.....</b>	
5.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки ЕТО.....	236
5.1.1. Оцінювання лінійної складової нелінійної моделі двигуна постійного струму.....	236
5.1.2. Тестовий приклад.....	239
5.1.3. Реальний приклад .....	243

5.2. Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних моделей ЕТО.....	245
5.2.1. Приклад. Нелінійна модель тягового зусилля двигуна AI-20М .....	246
5.3. Метод роздільного оцінювання статичної нелінійної і динамічної лінійної складових моделі ЕТО .....	251
5.3.1. Критерії наближення, що враховують гладкість шуканої залежності .....	253
5.3.2. Визначення гладкої статичної нелінійності з динаміки ЕТО .....	254
5.4. Об'єднання кусково-аналітичних моделей ЕТО в єдину аналітичну .....	268
5.4.1. Загальні положення .....	268
5.4.2. Інтеграція кусково-аналітичних залежностей в єдину аналітичну .....	269
5.4.3. Залежність ЕРС машини постійного струму (МПС).....	273
5.4.4. Аналітична модель залежності температури $\theta$ в камері згоряння на ТЕЦ від витрат повітря $G_{\text{пов}}$ і палива $G_{\text{пал}}$ .....	275
5.4.5. Аналітична модель нелінійності характеристики заслінки магістрального газопроводу.....	276
5.4.6. Аналітична модель вольт-амперних характеристик транзисторів.....	278
5.4.7. Аналітична модель «асинхронний двигун – відцентровий насос» .....	281
5.4.8. Побудова аналітичної моделі забезпечення інваріантності напруги $U_{\text{я}}$ до струму $I_{\text{я}}$ якоря генератора постійного струму(ГПС) .....	284
5.4.9. Побудова аналітичної моделі в задачі забезпечення максимальної потужності сонячної батареї.....	286
5.4.10. Побудова аналітичних моделей закономірності у вібраціях електричних машин для діагностики та прогнозування їх стану.....	289
5.5. Використання трьох типів моделей для забезпечення збіжності процесу параметричної ідентифікації.....	294
5.6. Комплексування методів і моделей в БАСІ-системах.....	302
<i>Список літератури до розділу 5</i> .....	311
Додаток 1 .....	314
Додаток 2 .....	316
Додаток 3 .....	318